

国際原子力総合技術センター
原子炉工学課程「原子炉の制御」
(平成16年度秋版)

Copyright©鈴木知明
日本原子力研究所 将来型炉研究グループ
suzudo@clsu3a0.tokai.jaeri.go.jp

2004年9月13日

目次

| | | |
|----------|---------------------------------------|-----------|
| 1 | 線形システム | 3 |
| 2 | 安定性とその判別法 | 6 |
| 2.1 | 線形システムの安定性 | 6 |
| 2.1.1 | 練習問題 | 7 |
| 2.2 | 原子炉システムの安定性 | 7 |
| 3 | ラプラス変換と伝達関数 | 10 |
| 4 | 周波数解析 | 13 |
| 4.1 | 周波数応答 | 13 |
| 4.2 | 原子炉システムの伝達関数 | 14 |
| 5 | 原子炉出力の制御 - 制御システムの安定化および即応性の改善 | 17 |
| 5.1 | 制御棒操作による出力制御 | 17 |
| 5.2 | 再循環流量による出力制御 | 17 |
| 5.3 | 制御システムの調節 (補償) | 19 |
| 5.4 | ナイキスト線図 | 23 |
| 6 | 人工知能 - 未来の原子炉制御に向けて | 23 |
| 6.1 | エキスパートシステムとファジー推論 | 23 |
| 6.2 | ニューラルネットワーク | 25 |
| 6.3 | 人工知能の利点と課題 | 26 |

1 線形システム

実際に存在する工学システムは非線形システムであり、完全に線形であるシステムは存在しない。それでも工学システムを数学的に線形システムとして表してしまうことには大きな“うまみ”がある。本章はそのうまみについて説明する。式で書くと線形システムとは一般に以下のような方程式で表される動的システムである。

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(t) \quad (1)$$

ただし、 t は時間を表す変数で、 $\mathbf{X}(t)$ および $\mathbf{U}(t)$ はそれぞれ、以下の式で表すように、システムの状態ベクトルおよび入力ベクトルである。

$$\mathbf{X}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^t \quad (2)$$

$$\mathbf{U}(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)]^t \quad (3)$$

ここで、添え字 n および m はそれぞれ状態ベクトルおよび入力ベクトルの次数である。また、 \mathbf{A} および \mathbf{B} は以下のような行列で、システム固有の定数である。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & & b_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & & b_{nm} \end{bmatrix} \quad (5)$$

式 (1) は状態方程式と呼ばれる。また、システムの出力は以下の出力方程式によって表現される。

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{X}(t) + \mathbf{D}\mathbf{U}(t) \quad (6)$$

ここで \mathbf{C} および \mathbf{D} は、 \mathbf{A} および \mathbf{B} と同様にシステム固有の定数行列である。

ここで議論を簡単にするため、出力方程式を無視して、状態方程式のみで議論することにする。これは出力ベクトルと状態ベクトルが等しいとして、状態変数をすべて直接計測したことに相当する。

式 (1) の左辺 $d\mathbf{X}/dt$ は状態変数の変化率を表している。この値は、同式の右辺の第 2 項を見るとわかるように、入力の大きさと線形関係にある。よって入力の変化による状態の変化を予測することが容易である。例えば、図 1 に示したように最低 2 つの入出力のペアが観測されていれば、第 3 の入力に対する出力はある程度予測できる。

また、入力が一定のとき固定点、すなわち $d\mathbf{X}/dt = 0$ の解は 1 つのみ（ただし、パラメータ行列は 1 次独立とする）。よって式 (1) の漸近解に初期値依存性がないので議論が簡便になる。それに対して非線形システムの場合、解が複数個存在する可能性がある。（図 2 参照。）実際、実在する系はほとんどすべて非線形である。線形システム理

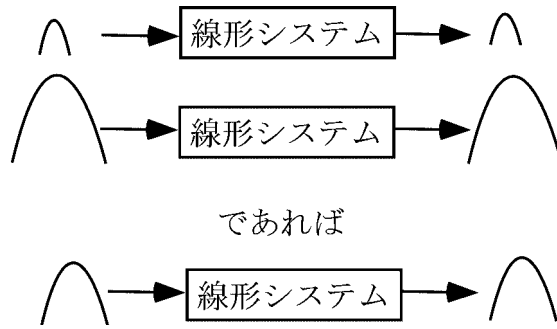


図 1: 入力に対する線形関係

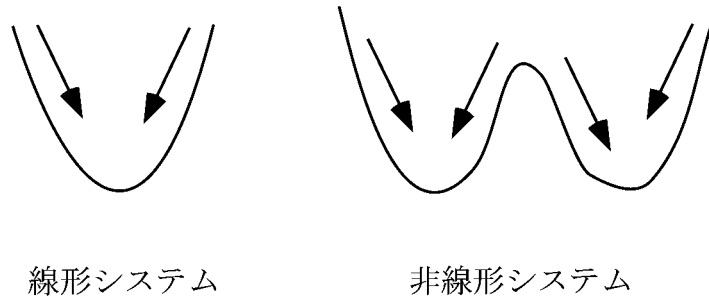


図 2: 初期値依存性

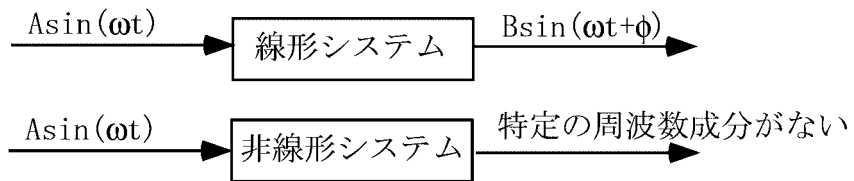


図 3: 周波数成分の独立性

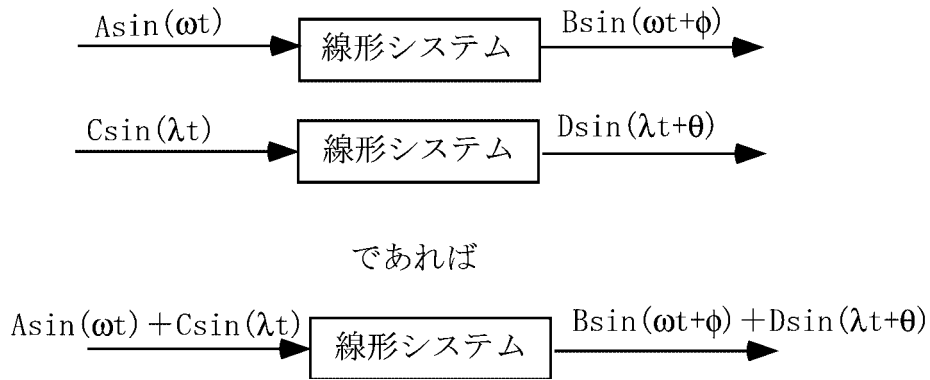


図 4: 重ね合わせの原理

論は非線形システムの平衡値近辺を近似的に線形とみなして、すなわち線形化して適用されるわけである。

線形システムのもう 1 つの重要な性質は重ね合わせの原理である。すなわち、入力 $u_1(t)$ に対する出力信号を $y_1(t)$ 、入力 $u_2(t)$ に対する出力信号を $y_2(t)$ とするとき、入力信号

$$a_1 u_1(t) + a_2 u_2(t) \quad (7)$$

に対し、

$$a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t) \quad (8)$$

となる。(前出の状態方程式、および出力方程式において重ね合わせの原理が成り立つことは、あとで議論する。) この重ね合わせの原理によって、線形システムを解析するにあたって非常に重要な性質が導かれる。周波数成分の独立性である。今、1 次の線形システムを考える。すなわち状態ベクトルや入力ベクトルはスカラーとする。図 3 のように正弦波 $A \sin(\omega t)$ を線形システムに入力すると、その出力は同じ周波数の正弦波 $B \sin(\omega t + \phi)$ になる。よって線形システムに別の正弦波 $C \sin(\lambda t)$ を入力して、 $D \sin(\lambda t + \theta)$ が出力されたとする。今度は、2 種類の正弦波を同時に入力したとする。これらの正弦波は線形システム内では干渉することなく、図 4 に示したように別々に入力した時に得られる出力の和となる。これは言うなれば周波数成分についての重ね合わせの原理である。非線形システムではこれに対して周波数成分の独立性は保証されない。よって線形システムにおいては、ある特定の周波数成分だけに注目した解析が行える。この利点は、あとの章で利用されることになる。

以上のように制御システムを数学的に線形システムとして表してしまえば、様々な数学的方法を利用することができる。

2 安定性とその判別法

2.1 線形システムの安定性

本章では安定判別法の直感的考え方を紹介し、それをフィードバックのある原子炉システムに応用する。まず、議論を簡単にするため、1次の線形システム

$$\frac{dx}{dt} = ax + bu \quad (9)$$

を考える。工学システムにおいて、一定の入力 u に対して状態変数 x がある有限値に収束しなければ、そのシステムを制御することは困難である。我々はこれをシステムの安定条件と呼ぶことにする。式 (9) において入力 u が一定であれば適当に x を変数変換することにより u の項を消去できる。よって、 x が有限値に収束する条件は明らかに $a < 0$ である。

次に上の議論を多次元に拡張しよう。まず、線形システムの式 (1) の固有値問題を考える。

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X} \quad (10)$$

ここで λ は固有値である。この解は以下の特性方程式から求まる。

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \quad (11)$$

ここに \det は行列式を、 \mathbf{I} は単位行列を表す。求まった解を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ とすると、これらを使って状態方程式を以下のように対角化できる。

$$\frac{d\mathbf{X}'}{dt} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \mathbf{X}' + \mathbf{B}'\mathbf{U}' \quad (12)$$

上式の各成分は

$$\frac{dx'_i}{dt} = \lambda_i x'_i + C \quad (13)$$

となる。ただし C は入力 u が一定の時に定数になる。 λ_i は一般に複素数であり、 α_i と β_i を任意の実数とすると、

$$\frac{dx'_i}{dt} = (\alpha_i + j\beta_i)x'_i + C \quad (14)$$

上記において虚数部分 $j\beta_i$ は振動成分の周波数に関連したパラメータで、安定性の解析では無視できる。すなわち上式と式 (9) は同じ形式になっている。よって線形システムが安定であるためには \mathbf{A} のすべての固有値の実数部 α_i が負であればよいことがわかる。

さて、問題はどのようにして固有値 λ_i を求めるかである。4次を超える方程式の解を一般的に求める方法はない。このような場合に役に立つのが以下で示すフルビッツの方法である。この方法を用いれば、特性方程式を解かずに安定判別が可能である。今、問題となっている線形システムの特性方程式が以下の式で表されるとする。

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \quad (15)$$

このとき，フルビッツの行列式 \mathbf{D}_i がすべて正であれば解の実数部はすべて負でシステムは安定であることがわかっている．

$$\mathbf{D}_1 = a_1 \quad (16)$$

$$\mathbf{D}_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} > 0 \quad (17)$$

$$\mathbf{D}_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0 \quad (18)$$

$$\mathbf{D}_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\ 1 & a_2 & a_4 & \dots \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots \\ 0 & 1 & a_2 & \dots \\ 0 & 0 & a_1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} > 0 \quad (19)$$

ただし存在しない係数は0とする．この他，ラウスの方法と呼ばれる類似のものがあるが，フルビッツの方法と等価であることがわかっている．

2.1.1 練習問題

$(\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0$ はすべての解が負でありこれを特性方程式にもつシステムは明らかに安定である．この式を展開した， $\lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = 0$ のフルビッツの行列式を求めてみる．

$$a_1 = 6, a_2 = 11, a_3 = 6 \quad (20)$$

$$D_1 = a_1 = 6 \quad (21)$$

$$D_2 = a_1 a_2 - a_3 = 6 * 11 - 6 = 60 \quad (22)$$

$$D_3 = a_1 a_2 a_3 - a_3^2 = a_3 D_2 = 360 \quad (23)$$

よってすべてのフルビッツの行列式が正であることが確かめられた．上の結果でわかるように，3次のシステムの場合， $a_3 > 0$ が満たされていれば D_3 を計算する必要はない．

2.2 原子炉システムの安定性

中性子動特性を遅発中性子を1群で近似した1点炉近似原子炉動特性方程式

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda} N(t) + \lambda C(t) \quad (24)$$

$$\frac{dC(t)}{dt} = \frac{\beta}{\Lambda} N(t) - \lambda C(t) \quad (25)$$

で表す．ここで $N(t)$ は原子炉の出力， $C(t)$ は先行核濃度， $\rho(t)$ は反応度， β は遅発中性子比率， λ は遅発中性子先行核崩壊定数， Λ は中性子世代時間である．ここで N_0 および C_0 を $N(t)$ および $C(t)$ の平衡値とする．すなわち式 (25) において，

$$0 = \frac{\beta}{\Lambda} N_0 - \lambda C_0 \quad (26)$$

が成り立つとする．ここで動特性方程式を平衡値からの変位

$$n(t) = \frac{N(t) - N_0}{N_0}, c(t) = \frac{C(t) - C_0}{N_0} \quad (27)$$

によって表すことにする．これらの式を変形し，式 (26) を使えば，

$$N(t) = N_0 n(t) + N_0 \quad (28)$$

$$C(t) = N_0 c(t) + C_0 = N_0 c(t) + \frac{\beta N_0}{\lambda \Lambda} \quad (29)$$

が成り立つ．また，式 (27) を微分して

$$\frac{dN(t)}{dt} = N_0 \frac{dn(t)}{dt}, \frac{dC(t)}{dt} = N_0 \frac{dc(t)}{dt} \quad (30)$$

を得る．以上の式 (28,29,30) を動特性方程式 (24,25) に代入し整理すれば以下のように変位の式に置き換えることができる．

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda} n(t) + \lambda c(t) + \frac{\rho}{\Lambda} \quad (31)$$

$$\frac{dc(t)}{dt} = \frac{\beta}{\Lambda} N(t) - \lambda c(t) \quad (32)$$

次に，上で得られた中性子動特性方程式を簡略化することを考えよう．通常原子炉内では即発中性子による変化は速いのでそれは一瞬にして起きると考え，その後は遅発中性子による動特性のみを考えればよい．即発中性子の動特性を無視すると式 (31) より次式が得られる．

$$\frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda} n(t) + \lambda c(t) + \frac{\rho(t)}{\Lambda} = 0 \quad (33)$$

上式の第 2 項の実質の効果は小さく，それを無視すると

$$n(t) = \frac{\rho(t)/\beta}{1 - \rho(t)/\beta} \quad (34)$$

となる．ここで展開公式 $\frac{1}{1-z} = 1 + z^2 + \dots$ を使えば，

$$n(t) = \frac{\rho(t)}{\beta} + \sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{\rho(t)}{\beta}\right)^i \quad (35)$$

を得る．ただし上式では 1 次と高次の項に分けた．

次に熱水力学的フィードバックを考える．ただし，ここでは温度フィードバック効果のみを考えるとする．ある BWR においてこの効果は次式で近似できることが確かめられている．

$$\frac{dT}{dt} = a_1 n(t) - a_2 T(t) \quad (36)$$

$$\frac{d^2\rho_\alpha}{dt^2} + a_3\frac{d\rho_\alpha}{dt} + a_4\rho_\alpha = \kappa T(t) \quad (37)$$

$$\rho = \rho_\alpha + DT(t) \quad (38)$$

式 (36) は出力の変化によって引き起こされる燃料温度の変化，式 (37) は燃料温度変化によって引き起こされる冷却材のボイド反応度の変化，式 (38) は全反応度がボイド反応度とドップラー効果による反応度変化の和であることを示している．上記の式において $a_1 \sim a_4$ および κ はフィッティングで得られた係数で直接物理的な意味はないが，以下のような関係が存在する．

- $a_1 \propto 1/(\text{燃料の熱容量})$
- $a_2 \propto \text{燃料の熱伝達時定数}$
- $a_3 \propto 1/(\text{冷却材のボイド持続時間})$
- $a_4 \propto 1/(\text{冷却材のボイド持続時間})$
- $\kappa \propto -(\text{冷却材のボイド反応度係数})$

上記の3つの式をまとめて

$$\frac{d^3\rho_\alpha}{dt^3} + (a_2 + a_3)\frac{d^2\rho_\alpha}{dt^2} + (a_2a_3 + a_4)\frac{d\rho_\alpha}{dt} + a_2a_4\rho_\alpha = a_1\kappa n(t) \quad (39)$$

と表す．さらに，ここで以下のように係数を置き換える．

$$c_1 = a_2 + a_3 \quad (40)$$

$$c_2 = a_2a_3 + a_4 \quad (41)$$

$$c_3 = a_2a_4 \quad (42)$$

$$k = -a_1\kappa \quad (43)$$

これらを使って，式 (39) は

$$\frac{d^3\rho_\alpha}{dt^3} + c_1\frac{d^2\rho_\alpha}{dt^2} + c_2\frac{d\rho_\alpha}{dt} + c_3\rho_\alpha = -kn(t) \quad (44)$$

となる．これに式 (35) を代入して ρ の高次元の項を無視すれば．

$$\frac{d^3\rho_\alpha}{dt^3} + c_1\frac{d^2\rho_\alpha}{dt^2} + c_2\frac{d\rho_\alpha}{dt} + (c_3 + \frac{k}{\beta})\rho_\alpha = 0 \quad (45)$$

この系の特性方程式は

$$\lambda^3 + c_1\lambda^2 + c_2\lambda + c_3 + \frac{k}{\beta} = 0 \quad (46)$$

となる．ただし，上式において λ はシステムの固有値である．フルビッツの安定条件を計算すると

$$c_1c_2 - (c_3 + \frac{k}{\beta}) > 0 \quad (47)$$

または、本来のの係数を用いれば、

$$a_2^2 a_3 + a_2 a_3^2 + a_3 a_4 > -\frac{a_1 k}{\beta} \quad (48)$$

となる。よって、安定な BWR を設計するには燃料の熱容量が大きく、燃料の熱伝達が遅く、冷却材のボイドの持続時間が短いようにする必要がある。ただし、これらを単純に実行したのでは経済性が悪くなるので、安定性と経済性を両立させるように設計パラメータを調節することになる。

3 ラプラス変換と伝達関数

$t > 0$ で定義された実関数 $f(t)$ に対して

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (49)$$

を $f(t)$ のラプラス変換と呼ぶ。ただし積分は収束するものとする。上式を部分積分して

$$F(s) = \left[\frac{1}{-s} e^{-st} f(t) \right]_0^{\infty} \quad (50)$$

$f(0) = 0$ と仮定して整理すれば

$$sF(s) = \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt \quad (51)$$

上式の右辺は $f(t)$ の導関数のラプラス変換になっている。すなわち導関数のラプラス変換は元の関数のラプラス変換に s を乗じれば良い。制御システムの数学的実体は微分方程式であり、ラプラス変換はそれを取り扱うための便利な方法である。

今ここで再び 1 次元線形システムの状態方程式 (9) を考え、 $x(t)$ に関して解いてみる。まず両辺に dte^{-st} を乗じて $u(t)$ に関する項を右辺に移項すれば、

$$-e^{-at} ax(t) dt + e^{-at} dx = e^{-at} bu(t) dt \quad (52)$$

を得る。この左辺が全微分の形になっていることに注意すれば、

$$d(x(t)e^{-at}) = e^{-at} bu(t) dt \quad (53)$$

この積分を $[0, t]$ の区間で実行すれば $x(t)$ が得られる。

$$x(t) = x_0 e^{at} + \int_0^{\infty} e^{a(t-\tau)} bu(\tau) d\tau \quad (54)$$

今度はラプラス変換した後に $X(s)$ について解いてみる。式 (9) の両辺をラプラス変換して

$$sX(s) = aX(s) + bU(s) \quad (55)$$

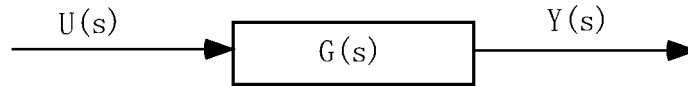


図 5: もっとも基本的なブロック線図

$$X(s) = \frac{b}{s-a}U(s) \quad (56)$$

よって陽に状態変数について解くことが時間領域の解法に比べて非常に簡単である。つまり、ラプラス変換は制御システムすなわち微分方程式を代数方程式に変換することができる。(これで第 1 章の重ね合わせの原理も納得できる。)

さて、出力方程式 (6) が 1 次元の場合は

$$y(t) = cx(t) + du(t) \quad (57)$$

となる。これもラプラス変換すると次式になる。

$$Y(s) = cX(s) + dU(s) \quad (58)$$

式 (56) を上式に代入して整理すれば出力の入力に対する比、

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{cd}{s-a} + d \quad (59)$$

を得る。この比は伝達関数と呼ばれるもので、線形システムの入力と出力の関係を表すことから、システムを表現するのに使われる。ちなみに入出力関係を時間領域で表現すれば

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\nu)u(t-\nu)d\nu \quad (60)$$

のように積分の形となる。ただし、

$$G(s) = \int_0^{\infty} g(t)dt \quad (61)$$

であり、 $g(t)$ は重み関数またはインパルス応答と呼ばれる。以上、1 次元の線形システムを扱ったが、多次元の場合は入出力の組み合わせの数だけ伝達関数が存在することになる。

伝達関数の大きな利点はシステムの中身をカプセル化でき、入出力信号から分離できることである。たとえばこれまで信号伝達の有様を図 1 のように象徴的にブロックと線で書いてきた。これは伝達関数を使えば図 5 のように数学的に厳密な表現となる。

また、 $G(s)$ の出力の $Y(s)$ が別のシステムの入力となりその出力が $Y'(s)$ とする。これを式で書くと

$$Y'(s) = G'(s)Y(s) = G'(s)G(s)U(s) \quad (62)$$

となる。すなわち直列に並んだ伝達関数は掛け合わせてもかまわない。すなわち、図 6 の中の 2 つのブロック線図は等価である。

制御の最終的な目標は出力をある値(またはある値の範囲に)に調節することである。このような調節を行うには、出力の値を読みそれに応じて入力を調整するようにす

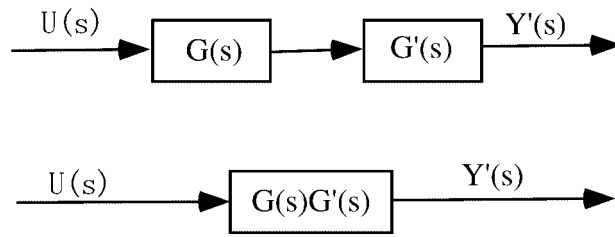


図 6: 伝達関数の直列結合

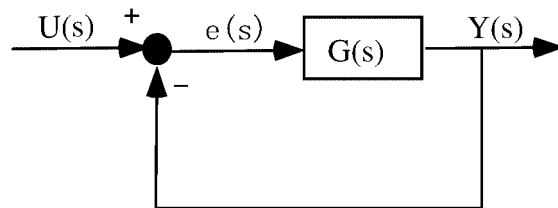


図 7: フィードバックのある制御システム

ればよい．このように出力を入力にもどすことをフィードバックと呼ぶ．図 7 にフィードバックの存在する制御システムをブロック線図で表した．

この場合，出力の目標値と実際の出力の差が $G(s)$ の入力となる．図 7 を式に書き下すと以下ようになる．

$$Y(s) = G(s)e(s) \quad (63)$$

$$e(s) = U(s) - Y(s) \quad (64)$$

これらより $e(s)$ を消去すれば

$$Y(s) = \left[\frac{G(s)}{1 + G(s)} \right] U(s) \quad (65)$$

を得る．すなわち，上式の $G(s)/[1 + G(s)]$ がフィードバック部分も含めたシステムの伝達関数である．

4 周波数解析

4.1 周波数応答

この章では制御システムを入出力信号の周波数に関連づけ解析する方法について触れる．すでに第 1 章で述べたように，このような解析を可能にしているのは線形システムにおける周波数成分の独立性である．（図 3 を見よ．）すなわち，ある特定の周波数成分に関して解析を行いそれをあとで集約してすべての周波数についての結果とすることができる．今，その特定の周波数を ω として， $f(t) = e^{j\omega t}$ という関数を考える．ただし，ここで j は $j^2 = -1$ を満たす．関数 $f(t)$ の時間微分は

$$\frac{df(t)}{dt} = j\omega e^{j\omega t} \quad (66)$$

である．これを式 (51) の右辺に代入すると

$$sF(s) = j\omega F(s) \quad (67)$$

を得る．上の結果は周波数成分に分解してシステムの応答を解析する場合には，ラプラス変換の s を $j\omega$ に置き換えてもかまわないことを意味している．我々はこのような周波数解析のための道具として，ラプラス変換に変わって次式で定義されるフーリエ変換を用いることになる．

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (68)$$

$F(j\omega)$ は $f(t)$ に含まれる角周波数 ω の成分の振幅であり， $F(s)$ に比べて物理的な意味が理解しやすい．上の式において， $f(t) = 0(t < 0)$ として $j\omega$ を s に置き換えればラプラス変換になる．このように 2 つの表現方法が存在し混乱するが，使い分けることが可能である．すなわち，数式の処理を行う場合には s 表示が便利で，解析を周波数と関連付ける場合には $j\omega$ 表示が便利である．以下の議論でもこの規則にのっとって表記することにする．ちなみにフーリエ変換の逆，すなわち逆フーリエ変換は

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (69)$$

である．積分を離散化し，級数で表すと

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} F(\omega_i) e^{j\omega_i t} \quad (70)$$

となる．上の式を見てもわかるように，フーリエ変換とは関数を異なった周波数を持つ正弦波に展開した時の係数を求める操作である．

今，角周波数 ω の正弦波を伝達関数 $G(s)$ のシステムに入力して，もとの正弦波に対して振幅が K 倍で位相が θ だけ遅れた正弦波が出力されたとする．すなわち，

$$u(t) = \sin \omega t, \quad y(t) = K \sin(\omega t + \theta) \quad (71)$$

であるとする． $u(t)$ および $y(t)$ をそれぞれラプラス変換する．

$$U(s) = \int_0^{\infty} \sin \omega t e^{-st} dt = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (72)$$

$$Y(s) = \int_0^{\infty} K \sin(\omega t + \theta) e^{-st} dt = K \frac{\omega \cos \theta + s \sin \theta}{s^2 + \omega^2} \quad (73)$$

ただし上記積分では $\sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$ の関係を使った．よって，このシステムの伝達関数は

$$G(s) = K \frac{\omega \cos \theta + s \sin \theta}{\omega} \quad (74)$$

である．ここでフーリエ変換の表示に置き換えると

$$G(j\omega) = K(\cos \theta + j \sin \theta) \quad (75)$$

となる． $G(j\omega)$ は複素数であり，以下のようにその絶対値と偏角で表現することができる．

$$\|G(j\omega)\| = K, \angle G(j\omega) = \theta \quad (76)$$

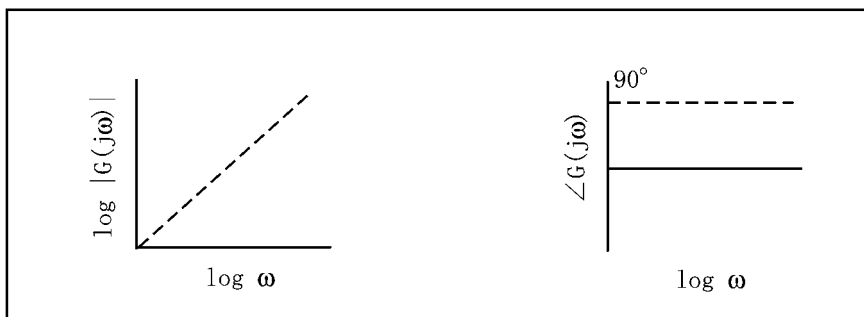
よって $\|G(j\omega)\|$ は入出力の振幅比になっており，一般に利得またはゲインと呼ばれる．また， $\angle G(j\omega)$ は入出力間の位相差になっており，これは単に位相と呼ばれる．すなわち，システムはゲインと位相によって特徴付けられ，これら 2 つをあわせてシステムの周波数応答と呼ぶ．周波数応答の最も一般的な表現方法は (周波数)-(ゲイン) と (周波数)-(位相) の 2 つのグラフとして示すことである．このグラフはゲイン位相線図，またはしばしばボード線図と呼ばれる．図 8 に基本的な周波数応答関数のボード線図を示した．図からわかるように，ゲインは対数表示させる．特に，常用対数を 20 倍した値 ($20 \log_{10} \|G(j\omega)\|$) が使われることが多く，この値をデシベルと呼び単位を db で表す．デシベルを使うのは習慣であって深い意味はない．

4.2 原子炉システムの伝達関数

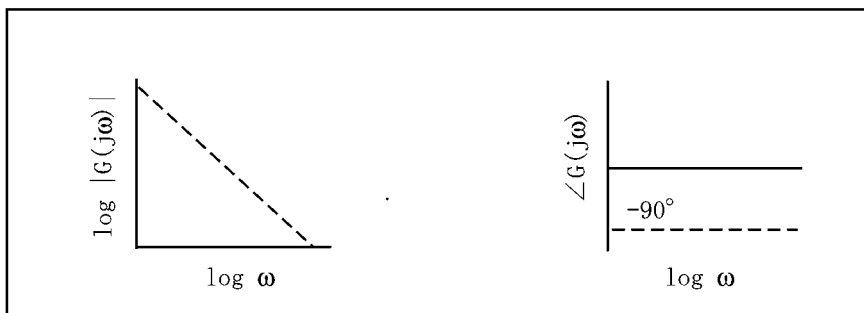
1 点炉近似原子炉動特性方程式 (31) を再度考える．この式の唯一の非線形項 $\rho(t)n(t)$ は，定常状態では微小であると考えられ，0 とおく．残りをラプラス変換すると，

$$sn(s) = -\frac{\beta}{\Lambda} + \lambda c(s) + \frac{\rho(s)}{\Lambda} \quad (77)$$

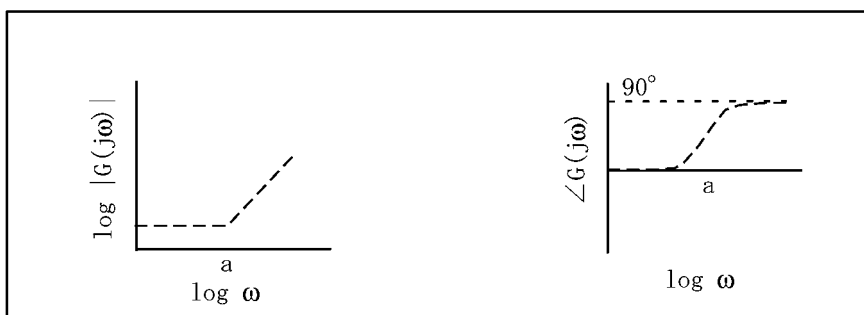
(a) $G(s)=s$



(b) $G(s)=1/s$



(c) $G(s)=s+a$



(d) $G(s)=1/(s+a)$

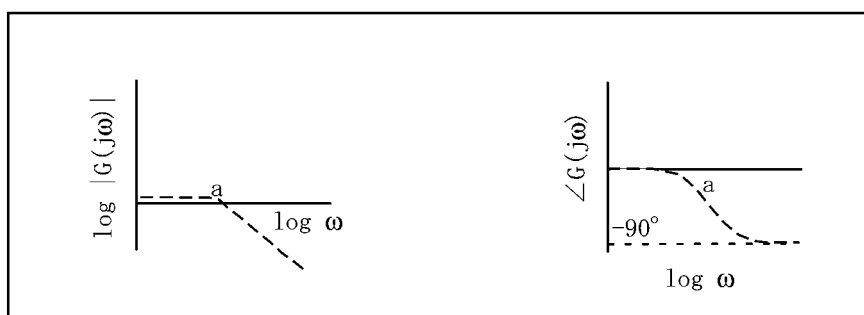


図 8: 基本的な周波数応答関数のボード線図

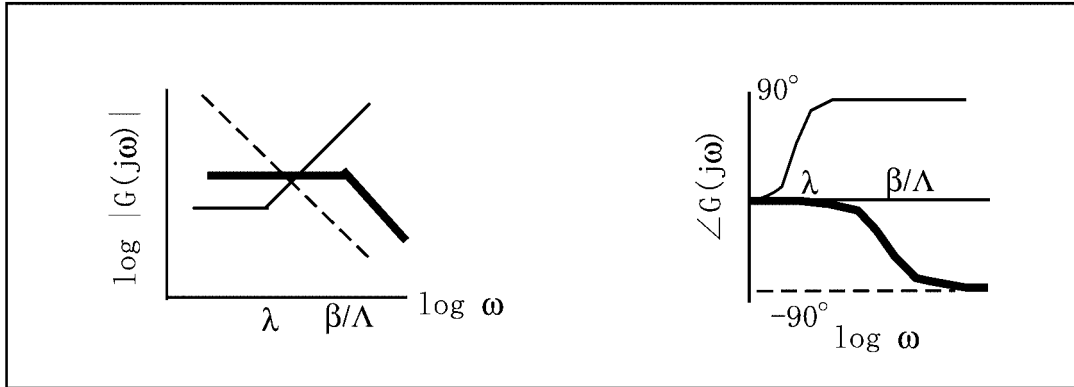


図 9: 原子炉システムの伝達関数に含まれる 3 つの関数のゲインと位相

となる．また，式 (32) も同様にラプラス変換すれば，

$$sc(s) = \frac{\beta}{\Lambda}n(s) - \lambda c(s) \quad (78)$$

となる．これらの式から，共通に存在する $c(s)$ を消去して整理すれば，原子炉システムの伝達関数 $G_R(s)$ が下のように得られる．

$$G_R(s) = \frac{n(s)}{\rho/\beta} = \frac{1}{s\Lambda/\beta}(s + \lambda)\frac{1}{s + \frac{\beta}{\Lambda} + \lambda} \quad (79)$$

この伝達関数の周波数応答は上式に $s = j\omega$ を代入して，

$$G_R(j\omega) = \frac{1}{j\omega\Lambda/\beta}(j\omega + \lambda)\frac{1}{j\omega + \frac{\beta}{\Lambda} + \lambda} = G_1(j\omega)G_2(j\omega)G_3(j\omega) \quad (80)$$

となる．ここで $G_1(j\omega) = 1/[j\omega\Lambda/\beta]$ ， $G_2(j\omega) = s + \lambda$ ， $G_3(j\omega) = 1/[j\omega + (\beta/\Lambda) + \lambda]$ である．よって，上記の周波数応答は 3 つの関数の積の形をしており，それぞれが図 8 に示した基本的な関数になっている．これらを同じ図に表すと図 9 のようになる．ただしこの図では，実際の原子炉では $\lambda \sim 0.1 [1/sec.]$ 及び $\beta/\Lambda \sim 100 [1/sec.]$ 程度になっていることを使っている．

伝達関数の掛け算はゲインにおいては掛け算，位相に関しては足し算になることは，前節の説明より明らかである．ただし，ボード線図においてゲインは対数で表されているので，図の上では足し算になる．よって，2 つの関数の積で表現された伝達関数の周波数特性は，もともとの関数のゲインと位相をそれぞれボード線図上で足し算することにより求めることができる．よって原子炉システムの伝達関数は図 9 の 3 つの周波数特性をゲイン及び位相に関して足し算を行うことで求まる．このようにして求められたのが図 10 である．

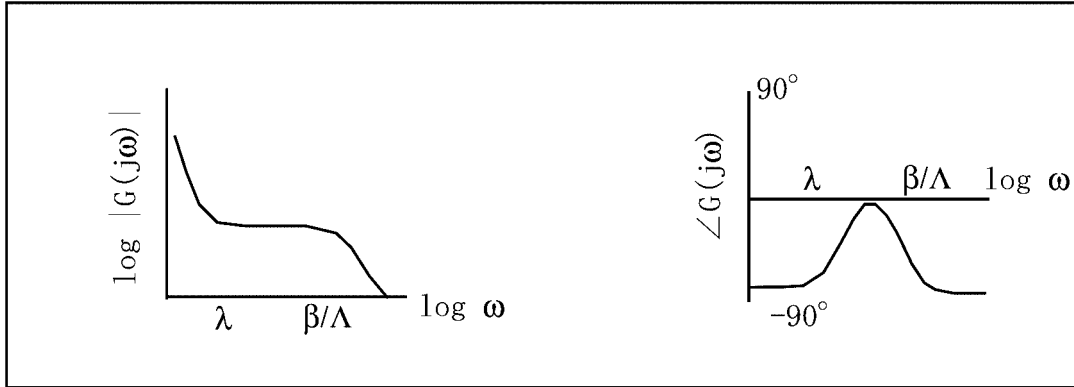


図 10: 原子炉システムの伝達関数のゲインと位相

5 原子炉出力の制御 - 制御システムの安定化および即応性の改善

5.1 制御棒操作による出力制御

原子炉において最も一般的に使われる制御の方法は、制御棒の操作によるものである。制御棒は通常、モータによって駆動され、その動特性は

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + k \frac{d\theta}{dt} = u(t) \quad (81)$$

で表される。ここで I は慣性能率、 k は摩擦定数である。また、 $\theta(t)$ はモータの軸の角度で、 $u(t)$ は入力信号である。上の式全体をラプラス変換して、変形すると

$$\frac{\theta(s)}{U(s)} = \frac{1}{Is^2 + ks} \quad (82)$$

となる。上の式は入力信号からモータ軸の角度（すなわち出力）への伝達関数になっている。パラメータを適当に変換すれば制御棒駆動機構の伝達関数 $G_m(s)$ は以下のようになる。

$$G_m(s) = \frac{K}{s(1 + Ts)} \quad (83)$$

ただし、 K はモータのゲイン、 T はモータの時定数である。

今、非常に単純に、1グループの制御棒群があり炉内中性子検出器の平均値が実時間で測定されているとする。そして、これらによって原子炉の出力一定制御を行うとしよう。このときのブロック線図は図 11 のようになる。図中の補償器は制御システムの調節に使われる。

5.2 再循環流量による出力制御

さて、BWR においては、定常運転時は制御棒ではなく、再循環の流量で出力を制御する。これは炉心内の冷却材流量を増やすと冷却材内のボイドがつぶれ、中性子減速の効果が高まり出力が上昇するからである。この制御システムをブロック線図にすると図 12 のようになる。

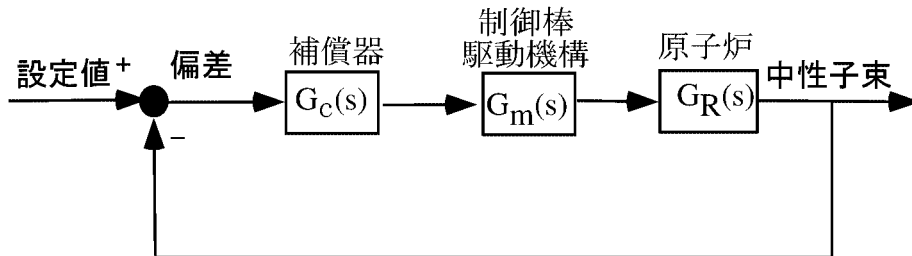


図 11: 制御棒操作による出力制御： $G_c(s)$, $G_m(s)$ および $G_R(s)$ はそれぞれ補償器，制御棒駆動機構，原子炉の伝達関数

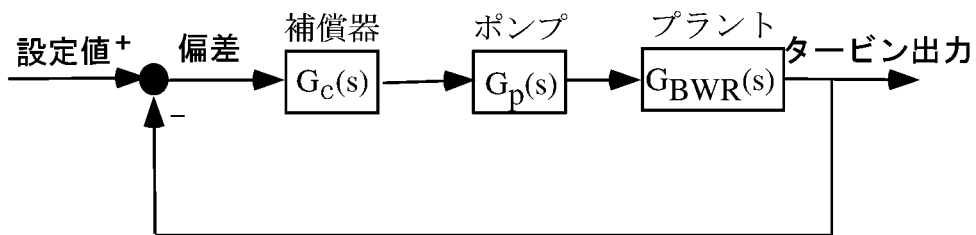


図 12: 再循環流量による出力制御： $G_c(s)$, $G_p(s)$ および $G_{BWR}(s)$ はそれぞれ補償器，再循環ポンプ、BWR プラントの伝達関数

5.3 制御システムの調節（補償）

現実に制御システムを設計するにはその調節が必要である．これを行うにはまず，制御システムの一巡伝達関数を調べて見る必要がある．制御棒による制御の例の場合，それは $G_c(s)G_m(s)G_R(s)$ である．例えば，制御の失敗でよく起こるのはゲインが大きすぎて出力が振動してしまう場合である．これは偏差に対してフィードバックが強過ぎる場合に起こる．このような場合一巡伝達関数のボード線図を図 13 に表した．一般に，制御システムは入力信号の変化が速すぎると，それに追従できなくなるため，低周波でゲインが高く，高周波でゲインが低い．この図において，ゲインが 1 になるところでは，その周波数の正弦波信号をループ内に入力すると，全く同じ振幅の正弦波出力信号がループを一巡して戻ってくることになる．この周波数はこれ以上高い周波数領域ではゲインが低くて制御できないことからカットオフ周波数と呼ばれ，図中では ω_c で表現されている．

さらに，位相に関して言えば，低周波の入力に対しては遅れなく制御できることからその値は 0° に近い．しかし，すでに述べたように，高周波領域では変化に追従できなくなるため，周波数が増えるにつれて位相はどんどん遅れて行くことになる．ひとつの目安が，位相が -180° になる周波数である．この周波数の正弦波がモータに入力されたとすると，フィードバック信号として戻ってくるのは位相が反転した同じ周波数の正弦波ということになる．さて，フィードバックは符号を変えられてモータの入力に戻されることから，結局は同じ最初の入力信号とフィードバックによる信号の位相は一致することになる．すなわち，元の信号とループを一回りした 2 つの信号はその周波数において強めあうことになる．よってこのような周波数においてシステムは振動しやすく，その周波数は共鳴周波数と呼ばれる．この周波数は，図 13 において ω_r で表現されている．

さて，上記の過度のフィードバックによって振動が生じる場合の振動周波数はこの共鳴周波数である．この振動が制御システム上，問題があるかどうかはその振動が時間とともに減衰するかによっている．減衰すれば問題はないが，そうでなければ制御不能の状態になってしまう．これを決めるのは共鳴周波数においてゲインである．この値が 1 未満であれば減衰し，そうでなければ振動は持続することになる．図 13 を見てみる．この場合は明らかに，共鳴周波数でのゲインが 1 以上になり，振動は持続する．このような場合の制御システムの改善法として，単純ではあるが補償器のゲインを小さくするという方法がある．

$$G_c(s) = \frac{1}{K} \quad (84)$$

これを行った後のボード線図を図 14 に示した．この図で，共鳴周波数においてゲインが 1 未満になっていることに注意して欲しい．この場合には制御システムが安定する．また，共鳴周波数におけるゲインの逆数は，安定性の余裕度とも理解できる．（ちなみにデシベル表示におけるこの値はゲイン余裕と呼ばれる．）ただし，極端に余裕がありすぎると今度は即応性が失われるので，ゲインの逆数は通常 3 から 10 程度が望ましい．安定性の余裕度を示すもうひとつの指標は，カットオフ周波数における位相である．安定な系（図 14）ではそれは -180° を上回っているが，不安定な系（図 13）では -180° を下回っている．この値が -180° に比較してどの程度大きくなっているかは，ひとつの安定性の指標になり，これを位相余裕と呼ぶ．

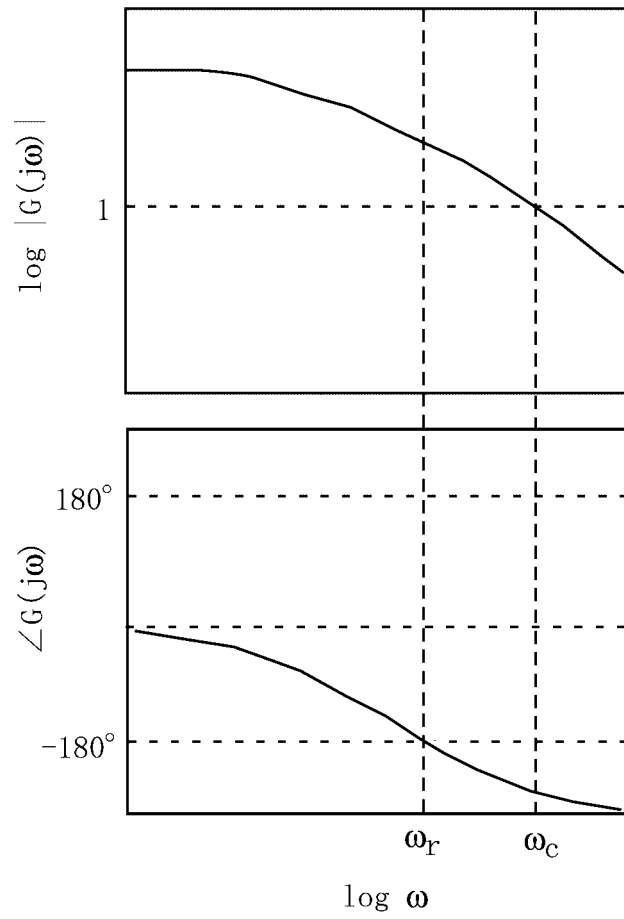


図 13: 過剰なフィードバックゲイン

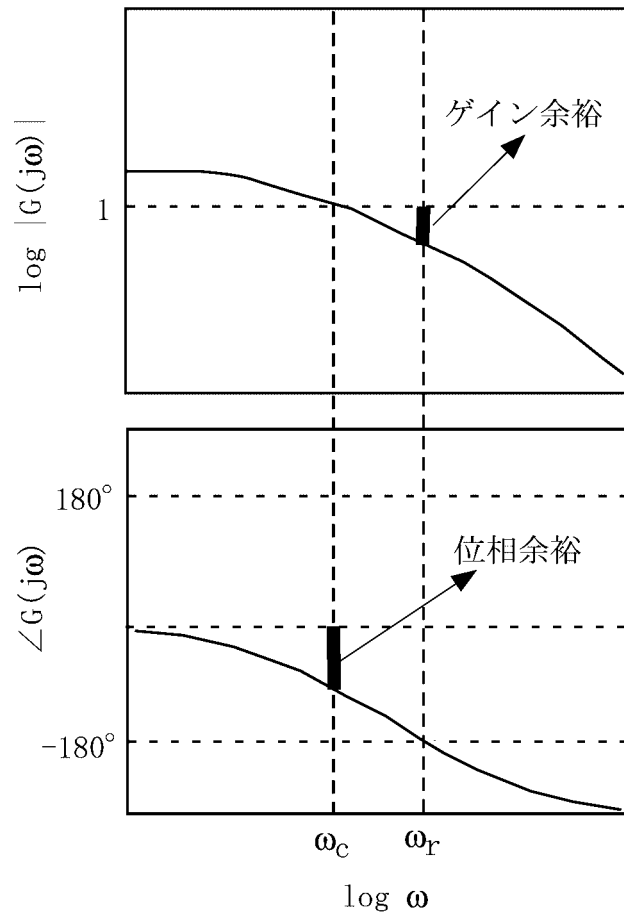


図 14: フィードバックゲイン抑えたときの制御システム

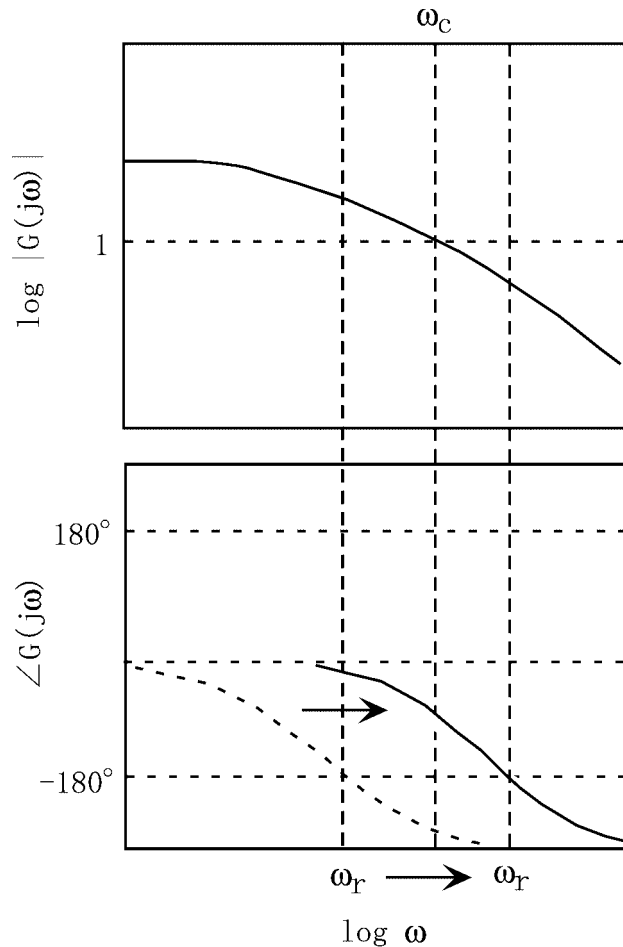


図 15: 位相進み回路による制御システムの改善

また，不安定な原因はゲインが高いのではなく位相が遅れ過ぎると理解することもできる．よって，その対策として位相を進ませる，すなわち補償器として位相進み回路 $G_c(s)$ を入れることが考えられる．この位相進み回路は次式のような形をしている．

$$G_c(s) = \frac{1}{a} \frac{1 + aTs}{1 + T} \quad (85)$$

ここで a は進ませる位相の大きさ， T は位相を進ませる周波数帯域に関連した量である．これを図 13 に適用すると（図 15）のようになりゲインを変えなくとも安定化できる．

以上のように制御システムの調整は，ゲインや位相を調節することにより達成できる．一般によく用いられる補償器はPID 補償器である．この補償器の伝達関数は，比例 (P)，積分 (I)，微分 (D) の 3 つの部分から構成され，以下の式で表される．

$$G_{PID}(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) \quad (86)$$

ここに K は比例ゲインでゲイン調節に使われる． T_I はリセット率と呼ばれ積分効果のパラメータで定常偏差を小さくするための補償に用いる．また， T_D は微分時間で，

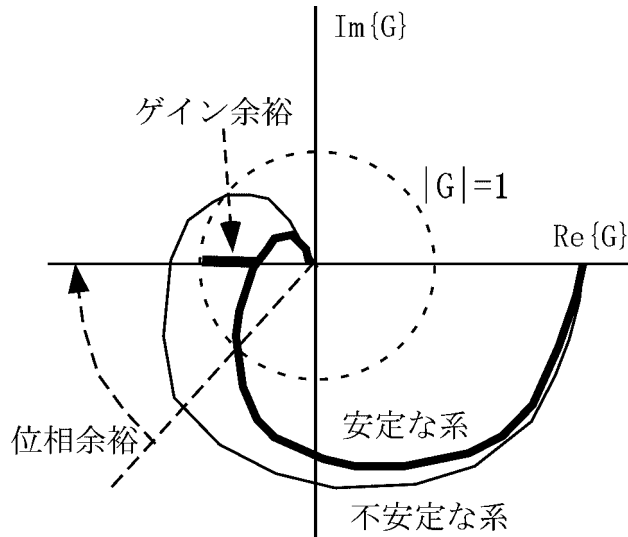


図 16: 不安定, 安定な制御システムのナイキスト線図

即応性の補償 (すなわち位相進み補償と類似) に用いられる。PID 補償器を用いれば, 複数のパラメータを調整することにより様々な補償効果が得られる。

5.4 ナイキスト線図

さて, 複素平面に一巡伝達関数の実数部と虚数部をプロットすることでも, その制御システムの特徴がわかる。このような線図はナイキスト線図と呼ばれる。上記の不安定な場合と安定な場合について, そのグラフを描いてみたのが図 16 である。安定な場合, 虚軸を横切るとき, 単位円の中にあり, 不安定な場合には単位円の外である。安定な場合のゲイン余裕, 位相余裕は理解しやすくなる。

6 人工知能 - 未来の原子炉制御に向けて

人工知能とは, 人と同じような思考のできるコンピュータシステムのことをさす。現在, 人工知能の研究は盛んに行われており, この研究が十分成熟すれば原子炉の完全自動運転も夢ではない。しかしながら, 現実のコンピュータははまだ人間とは対等とは言えない。以下では, 代表的な人工知能の方法を紹介し, その研究の現状を概観する。

6.1 エキスパートシステムとファジー推論

エキスパートシステムとは, 専門家 (エキスパート) の代わりにするコンピュータシステムをさす。最初の応用は医療関係から始まった。すなわち, 自分の症状を入力すると, コンピュータが医者になって診察してくれるソフトウェアである。エキスパートシステムの構造は知識部と推論部の 2 つに別れていて, 知識部では専門家の知識が格納され, 推論部は知識を用いて実際に推論を行う。すなわち, 知識部は静的であり, 推論部は動的である。

これまで見てきたように、通常運転時には適当な制御システムによって原子炉を安定に運転できる。エキスパートシステムが必要となるのは、それ以外で現在自動化されていない起動停止や、機器の故障時の対応などにおいてである。例えば、運転員はアラームがなった場合、アラームに関連した信号の値から異常原因を早期に同定しようとする。例えばあるタンクからリークがあるときには、そのタンクの水位が下がるような気がするが実際そうでない場合が多い。なぜなら、そのタンクの水位は常に水位計で監視されており、異常に水位が下がればそれを補償するような制御回路が付随していて、タンクへの流入量を増やすので実際の水位の変化はない。よって、アラームは故障のあった箇所から離れた信号に現れることもあり、単純には異常箇所を見つけることができない。ところが熟練した運転員は、ある異常現象が起こるとどのパラメータが変化するかを予め知っているため、早期に的確な判断と処置ができる。エキスパートシステムにやらせたいのはまさにこのようなタスクである。

上記のようなリークの問題に対して専門家が持っている知識は、通常、以下のような if-then ルールの形式をとる。

```
if [流入量と流出量の差が水位の増加から大幅にずれている]
then [タンクから水がリークしている可能性が高い]
```

上の if-then ルールにおいて、“大幅に”とか、“可能性が高い”のように直接数値にできない表現が含まれていることに注意して欲しい。専門家の知識とは往々にしてこのようなあいまいなものである。さらに、他にもタンクのリークに関連したルールがいくつかあるとすると、それらの結果を総合的な判断を数値化するのはかなり煩雑である。このようなあいまいな表現の論理演算を行うのがファジー論理である。詳しい説明は省くがファジー論理では、通常ブール変数（0または1）で行われる論理演算が、0と1の間の実数での論理演算に拡張される。よって、我々はより直接的に専門家のもっている知識を数値データ化できる。例えば、タンク外部の湿度を計測しているとする、リークがある場合にはその値が高くなるはずである。よって以下のようなルールを考えることができる。

```
if [タンク外の湿度が異常に高い]
then [タンクから水がリークしている可能性が高い]
```

よって、ここでタンクがリークしている可能性を考える場合、流入量と流出量の差から説明できないタンク水位の変化、タンク外の湿度の異常高の両方を考慮しなくてはならないことがわかる。ここでは水位変化の異常度とタンク外湿度の異常度をファジー変数に表す。そして、ファジー変数同士の論理演算（この場合は AND 演算）を行いその答えが、「タンクから水がリークしている可能性が高い」という命題の支持度になる。この支持度によってタンクのリークの可能性を数値化することになる。

論理演算が単純な場合にはブール代数に変換するのは容易なのでファジー論理の恩恵は少ない。しかし、多数のルールが関連している場合には、非常に強力なツールになる。すべての場合についてブール変数のみで乗り切るのは困難になってくるし、できあがったプログラムは複雑で最初に何を意味していたのかもわからなくなってしまうからである。

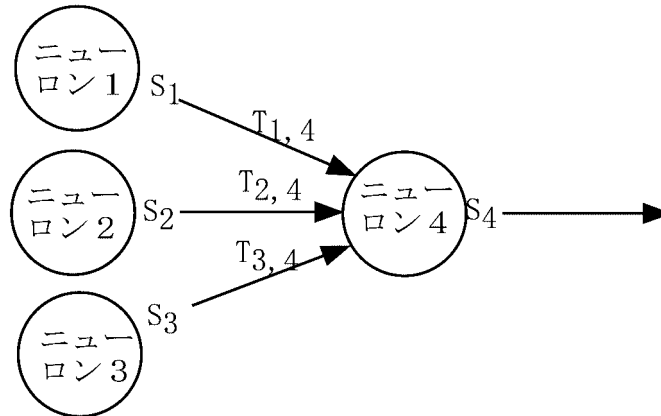


図 17: ニューロンの演算

6.2 ニューラルネットワーク

ニューラルネットワークとは、脳の神経細胞すなわちニューロンを数学的にモデル化したものを適当に組み合わせることにより、なんらかの演算をさせる数学的な方法である。図 17 にニューラルネットワーク演算の簡単な図を描いた。ニューロンは複数の入力を受け取り、その総和が計算される。その総和はニューロン内の閾値を超えると出力を別のニューロンに入力する。すなわちニューロンの数学的な表現は

$$S_i = f\left(\sum_j T_{ij} S_j - \Theta\right) \quad (87)$$

となる。ここで S_i は添え字 k のニューロンの出力、 f はニューロンの伝達関数、 T_{ij} はニューロン i とニューロン j の間の重み関数、 Θ は閾値である。最も単純な伝達関数は、以下のようなステップ関数である。

$$f(x) = 0(x < 0), 1(x \geq 0) \quad (88)$$

すなわちこのニューロンは総和が閾値以上であれば 1 を出力し、そうでなければ 0 を出力する。

ニューロンをどのように配置するかは、任意であり、利用者が目的にあわせて選択することになる。工学的にもっとも頻繁に使われているのは、階層型ニューラルネットワークであろう。これはニューロンを図 18 のように、いくつかのグループに分割し階層上に並べたものである。このように配置すると、ニューラルネットワーク内の信号の流れが 1 方向に限定される。

さて、ニューラルネットワークを実際に作成する場合には、式 (87) の中の重みを予め決定しなくてはならない。このプロセスは学習と呼ばれる。学習には様々な方法が存在するが、以下に典型的な一例をあげる。

1. ある入力データセットに対して正解、すなわちニューラルネットワークに期待する出力データセットを用意しておく。
2. すべての重みを乱数発生ルーチンによってランダムに選択して、それを重みセットの初期値とする。

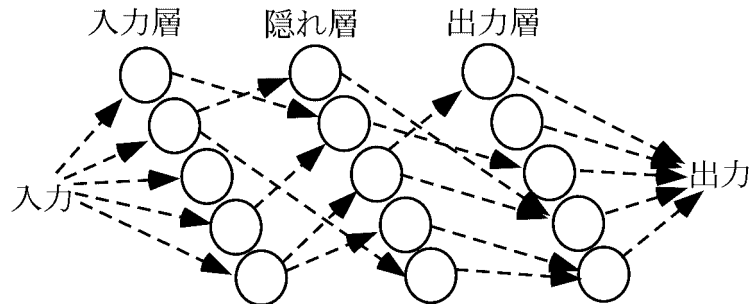


図 18: 階層型のニューラルネットワーク

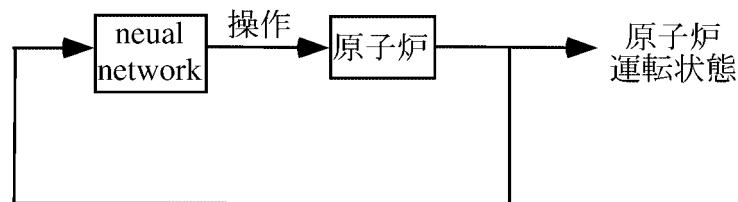


図 19: ニューラルネットワークの原子炉起動停止への応用

3. 現在の重みセットを使って、用意した入力データセットに対して出力を計算する。
4. 計算された出力データセットと正解の出力データセットの差が縮まるように重みセットを調整する。
5. 上記の差がすべての重みについて小さければ学習を終了する。そうでない場合は 3 に戻る。

このような学習を行えば、未知の入力データセットに対しても常に正解を出すことを期待できる。重みを調整する場合には、一般に最速降下法等が用いられるが、このような場合伝達関数の微分を使うため、ステップ関数ではなくシグモイド関数のような滑らかな伝達関数を用いる必要がある。以上のような学習法はバックプロパゲーション学習法と呼ばれる。

階層型ニューラルネットワークは多入力多出力の系になるので、例えば起動時や停止時などの運転パターンを学習させておけば、現在手動で行っている起動停止を自動化できるかもしれない(図 19)。

6.3 人工知能の利点と課題

人工知能の最大の利点は数式にするのが困難で漠然とした関係でも計算機の中で簡便に数値化できることである。例えば、上記のように、エキスパートシステムにおいて熟

練運転員の経験をファジー論理のルールにしたり，ニューラルネットワークにおいて運転操作のパターンを学習させることを学んだ．

しかしながら，様々な課題も指摘されている．例えば，人工知能はこれまで経験したことのないことや学習していないことを判断できない可能性がある．原子炉のような安全が最優先されるシステムにおいて，このような不確定なものに制御を委ねることは重大な事故につながりかねない．従って現実的には，人工知能の利用は完全自動化ではなく，部分自動化あるいは運転支援にならざるを得ない．

またそのような制御システムはソフトウェア中心のシステムになるため，制御システムの中身が設計者以外にとってブラックボックス的になってしまう．よってシステムの試験者がその中身を理解しにくくなり，信頼性の検証が困難になってしまう．人工知能が原子炉制御に関して提出する結果には常に高い信頼性が求められるのは当然である．しかしながら，このようなソフトウェア信頼性に関する問題点は，一般的に軽視されがちである．先進国の中では特に日本においてこの傾向が強い．昨今，航空管制やみずほ銀行のトランザクションを処理するソフトウェアの不備がわが国の社会に大きな混乱をもたらすこと考えて欲しい．これらの事故の原因がプログラマーの不注意に矮小化されてしまえば，また同様な事故がおきてしまうであろう．我々に必要なことはソフトウェア信頼性向上のための科学的な方法論を常に意識しながらソフトウェア中心のシステムを開発することである．

また，客観的な信頼性に加えて人間がその信頼性を感じることができる主観的な信頼性も重要である．それがなければ到底自動運転を人工知能に委ねることはできない．人間同士の信頼関係がコミュニケーションによって構築されるように，人間と人工知能もコミュニケーションが重要である．例えば，ユーザーガイドや設計情報等の情報提供を行なう際に，書き手中心ではなく読み手中心にしていく必要がある．1994年名古屋空港で起きた中華航空機墜落事故は人間がコンピュータを信頼しなかったことによって起きた悲劇である．人工知能の意見が自分のそれと違う時にも，安心して人工知能に任せられることができるようになれば，人工知能による完全自動運転の実用化も夢ではなくなるであろう．