電気電子工学科　　　　　　　　2017/5/31

数学 I　　中間試験　　解答

1.(10 点)

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$=\{e^{x+y}\log(1+x+y)+e^{x+y}\frac{1}{1+x+y}\}\frac{1}{2\sqrt{u+v}}+\{e^{x+y}\log(1+x+y)+e^{x+y}\frac{1}{1+x+y}\}\cos(uv)v$$

$$=e^{x+y}\{\log(1+x+y)+\frac{1}{1+x+y}\}\{\frac{1}{2\sqrt{u+v}}+v\cos(uv)\}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$=\{e^{x+y}\log(1+x+y)+e^{x+y}\frac{1}{1+x+y}\}\frac{1}{2\sqrt{u+v}}+\{e^{x+y}\log(1+x+y)+e^{x+y}\frac{1}{1+x+y}\}\cos(uv)u$$

$$=e^{x+y}\{\log(1+x+y)+\frac{1}{1+x+y}\}\{\frac{1}{2\sqrt{u+v}}+u\cos(uv)\}$$

2.(10 点)

$$f=e^{x+3y},\ f=f(0,0)+\frac{1}{1!}\{xf_x(0,0)+yf_y(0,0)\}+\frac{1}{2!}\{x^2f_{xx}(0,0)+2xyf_{xy}(0,0)+y^2f_{yy}(0,0)\}+\cdots$$

$$f_x=e^{x+3y},f_y=3e^{x+3y}=,f_{xx}=e^{x+3y},f_{xy}=3e^{x+3y},f_{yy}=9e^{x+3y}$$

$f(0,0)=1, f_x(0,0)=1, f_y(0,0)=3, f_{xx}(0,0)=1, f_{xy}(0,0)=3, f_{yy}(0,0)=9$ より

$$f=1+(x+3y)+\frac{1}{2}(x^2+6xy+9y^2)+\cdots=1+(x+3y)+\frac{1}{2}(x+3y)^2+\cdots$$

3.(10 点)

$$3x^2+3y^2y'+3z^2z'=0$$

$$yz+xy'z+xyz'=0$$

$$\begin{cases}y^2y'+z^2z'=-x^2\\ xzy'+xyz'=-yz\end{cases}$$

より,

$$y' = \frac{\begin{vmatrix} -x^2 & z^2 \\ -yz & xy \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y^2 & z^2 \\ xz & xy \end{vmatrix}} = \frac{-x^3y+z^3y}{xy^3-xz^3} = \frac{y(z^3-x^3)}{x(y^3-z^3)}, \qquad z' = \frac{\begin{vmatrix} y^2 & -x^2 \\ xz & -yz \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y^2 & z^2 \\ xz & xy \end{vmatrix}} = \frac{x^3z-zy^3}{xy^3-xz^3} = \frac{z(x^3-y^3)}{x(y^3-z^3)}$$

4.(10 点)

$f = x^3 + 3xy^2 + 6x^2 + 2y^2 + 15$

$f_x = 3x^2 + 3y^2 - 6x = 0, f_y = 6xy - 6y = 6y(x-1) = 0$

$f_{xx} = 6x - 6, f_{xy} = 6y, f_{yy} = 6x - 6$

$f_x = 3(x^2 + y^2 - 2x) = 0, f_y = 6y(x-1) = 0$ から $y = 0,\ or\ \ x = 1$.

$y = 0$ のとき

$f_x = 3x(x-2) = 0$ から $x = 0,\ or\ \ x = 2$ よって $P_1(0,0), P_2(2,0)$ を得る.

$x = 1$ のとき $f_x = 3(y^2 - 1) = 0$ から $y = \pm 1$ よって $P_3(1,1), P_4(1,-1)$ を得る.

$f_{xx} = 6(x-1) = A,\ f_{xy} = 6y = B,\ f_{yy} = 6(x-1) = C, D = B^2 - AC = 36\{y^2 - (x-1)^2\}$ とする.

$P_1(0,0)$ のとき $A = -6 < 0, D = -36 < 0$ よって $f(0,0) = 24$ は極大値.

$P_2(2,0)$ のとき $A = 6 > 0, D = -36 < 0$ よって $f(2,0) = 20$ は極小値.

$P_3(1,1)$ のとき $A = 0, D = 36 > 0$ より極値でない. 同じく $P_4(1,-1)$ のとき $A = 0, D = 36 > 0$ より極値でない.

答　$f(0,0) = 24$　極大値, $f(2,0) = 20$　極小値

5.(10 点)

$f(x,y) = x^3 + 4xy - y^3 = 0, f_x = 3x^2 + 4y, f_y = 4x - 3y^2, f_{xx} = 6x$

$y' = -\dfrac{f_x}{f_y}, y'' = -\dfrac{f_{xx}}{f_y}$ である. $y' = 0$ より $f_x = 3x^2 + 4y = 0$ である. これから $y = -\dfrac{3x^2}{4}$ を得る.

これを $f = 0$ に代入し $f = x^3\{(\dfrac{3}{4})^3 x^3 - 2\} = 0$ となる. これより $x = 0\ or\ x = \dfrac{4}{3}2^{\frac{1}{3}}$ となる.

$x = 0$ のとき $y = 0$ $P_1(0,0)$ これは $f_y = 0$ になるため y' が存在しないので除く. $x = \dfrac{4}{3}2^{\frac{1}{3}}$ のとき $y = -\dfrac{3}{4}x^2 = -\dfrac{4}{3}2^{\frac{2}{3}}$ となる. $P_2(\dfrac{4}{3}2^{\frac{1}{3}}, -\dfrac{4}{3}2^{\frac{2}{3}})$ は

$y'' = -\dfrac{f_{xx}}{f_y} = -\dfrac{6x}{4x - 3y^2} = \dfrac{3}{2} > 0$ である.

よって $x = \dfrac{3}{4}2^{\frac{1}{3}}$ のとき極小値 $y = -\dfrac{4}{3}2^{\frac{2}{3}}$ となる.　　答 $x = \dfrac{4}{3}2^{\frac{1}{3}}$ のとき極小値 $y = -\dfrac{4}{3}2^{\frac{2}{3}}$

6.(10 点)

$g = x^4 + y^4 - 64 = 0, f = x^2 + xy + y^2$ であるから，$F = f + \lambda g = x^2 + xy + y^2 + \lambda(x^4 + y^4 - 64)$ とおく.

$F_\lambda = x^4 + y^4 - 64 = 0, F_x = 2x + y + \lambda(4x^3) = 0, F_y = x + 2y + \lambda(4y^3) = 0$ より

$\lambda = -\dfrac{2x+y}{4x^3} = -\dfrac{x+2y}{4y^3}$ である．これより $(2x+y)y^3 = (x+2y)x^3$ を得る．よって,

$(y-x)(y+x)^2 = 0, y = \pm x$ である.

$y = x$ のとき $x^4 = 32, y = x = \pm 2\sqrt[4]{2}$ ，$f = 3x^2 = 12\sqrt{2}$，$y = -x$ のとき

$x^4 = 32, x = \pm 2\sqrt[4]{2}, y = \mp 2\sqrt[4]{2}$，$f = x^2 = 4\sqrt{2}$

答　$f(\pm 2\sqrt[4]{2}, \pm 2\sqrt[4]{2}) = 12\sqrt{2}$ が最大値，$f(\pm 2\sqrt[4]{2}, \mp 2\sqrt[4]{2}) = 4\sqrt{2}$ が最小値　（複号同順）

7.(10 点)

$f = z - x^3 - 2x^2y + 3xy^2 - y^3 = 0, P(1,2,1), f_x = -3x^3 - 4xy + 3y^2, f_y = -2x^2 + 6xy - 3y^2, f_z = 1$

より $f_x = 1, f_y = -2, f_z = 1$

答　接平面　$(x-1) - 2(y-2) + (z-1) = 0$，法線　$x - 1 = \dfrac{y-2}{-2} = z - 1$

8.(10 点)

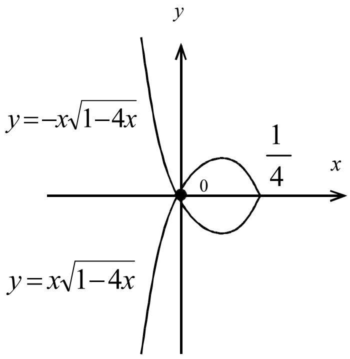
$f = y^2 - x^2 + 4x^3 = 0, f_x = -2x + 12x^2 = 0, f_y = 2y = 0$ から $y = 0, f_x = 2x(6x-1) = 0$ である．よって $x = 0, or\ x = \dfrac{1}{6}$　$f = x^2(4x-1) = 0$ より特異点は $(0,0)$ である．　$f_{xx} = A = -2 + 24x,$

$f_{xy} = B = 0, f_{yy} = C = 2, D(x,y) = B^2 - AC = -2(24x-2), D(0,0) = 4 > 0$ から特異点は結節点である．$y = \pm x\sqrt{1-4x}$ より $x \le \dfrac{1}{4}$ である．$y = x\sqrt{1-4x}, y' = \dfrac{1-6x}{\sqrt{1-4x}}$

答　特異点(0,0)は結節点

x	0		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{4}$
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{18}$	$\searrow$	0

増減表



グラフ　結節点　(0,0)

9.(10 点)

$f=y-\frac{1}{4}(x-\alpha)^4-\alpha, f_\alpha=(x-\alpha)^3-1=0$ から $(x-\alpha)=1$ により，$\alpha=x-1$ である．これを，$y=\frac{1}{4}(x-\alpha)^4+\alpha$

に代入する．

$y=x-\frac{3}{4}$

つぎに特異点の有無を検証する．

$f_x=-(x-\alpha)^3=0, f_y=1\neq 0$ より特異点は存在しない．

答　　包絡線は $y=x-\frac{3}{4}$

特異点は存在しない．

10.(10 点)

$x=1-t+t^2, y=\sqrt{1+2t+3t^2}, z=\frac{t}{\sqrt{1+t}}$

$x'=-1+2t, y'=\frac{1}{2}(1+2t+3t^2)^{-\frac{1}{2}}(2+6t), z'=\frac{\sqrt{1+t}-t\frac{1}{2\sqrt{1+t}}}{1+t}=\frac{2+t}{2(1+t)\sqrt{1+t}}$，$t=1$

のとき

$x(1)=1, y(1)=\sqrt{6}, z(1)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　$x'(1)=1, y'(1)=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}, z'(1)=\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$ から

答　接線 $(x-1)=\dfrac{y-\sqrt{6}}{\frac{2\sqrt{6}}{3}}=\dfrac{z-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{3\sqrt{2}}{8}}$ 法平面　$(x-1)+\dfrac{2\sqrt{6}}{3}(y-\sqrt{6})+\dfrac{3\sqrt{2}}{8}(z-\dfrac{\sqrt{2}}{2})=0$