情報科学科・応用生命システム工学科　　　　　　2017/6/1

数学Ⅰ　　中間試験　　解答

1.(10 点)

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$=\{e^{x+y}\tan(x+y)+e^{x+y}\sec^2(x+y)\}\frac{2u}{2\sqrt{u^2+v^2}}+\{e^{x+y}\tan(x+y)+e^{x+y}\sec^2(x+y)\}v$$

$$=e^{x+y}\{\tan(x+y)+\sec^2(x+y)\}(\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}+v)$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$=\{e^{x+y}\tan(x+y)+e^{x+y}\sec^2(x+y)\}\frac{2v}{2\sqrt{u^2+v^2}}+\{e^{x+y}\tan(x+y)+e^{x+y}\sec^2(x+y)\}u$$

$$=e^{x+y}\{\tan(x+y)+\sec^2(x+y)\}(\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}+u)$$

2.(10 点)

$$f=(x+y)e^{x+y},\ f=f(0,0)+\frac{1}{1!}\{xf_x(0,0)+yf_y(0,0)\}+\frac{1}{2!}\{x^2f_{xx}(0,0)+2xyf_{xy}(0,0)+y^2f_{yy}(0,0)\}+\cdots$$

$$f_x=e^{x+y}+(x+y)e^{x+y}=(1+x+y)e^{x+y},\ f_y=e^{x+y}+(x+y)e^{x+y}=(1+x+y)e^{x+y},$$
$$f_{xx}=e^{x+y}+(1+x+y)e^{x+y}=(2+x+y)e^{x+y},\ f_{xy}=e^{x+y}+(1+x+y)e^{x+y}=(2+x+y)e^{x+y},$$
$$f_{yy}=e^{x+y}+(1+x+y)e^{x+y}=(2+x+y)e^{x+y}$$

$f(0,0)=0, f_x(0,0)=1, f_y(0,0)=1, f_{xx}(0,0)=2, f_{xy}(0,0)=2, f_{yy}(0,0)=2$ より

$$f=0+(x+y)+\frac{1}{2}(2x^2+4xy+2y^2)+\cdots=(x+y)+(x+y)^2+\cdots$$

3.(10 点)

$$5x^4+5y^4y'+5z^4z'=0$$
$$yz+xy'z+xyz'=0$$
$$\begin{cases} y^4y'+z^4z'=-x^4 \\ xzy'+xyz'=-yz \end{cases}$$

より,

$$y'=\frac{\begin{vmatrix}-x^4 & z^4\\ -yz & xy\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y^4 & z^4\\ xz & xy\end{vmatrix}}=\frac{-x^5y+z^5y}{xy^5-xz^5}=\frac{y(z^5-x^5)}{x(y^5-z^5)},\qquad z'=\frac{\begin{vmatrix}y^4 & -x^4\\ xz & -yz\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y^4 & z^4\\ xz & xy\end{vmatrix}}=\frac{x^5z-zy^5}{xy^5-xz^5}=\frac{z(x^5-y^5)}{x(y^5-z^5)}$$

4.(10 点)

$f=x^3+3xy^2+6x^2+2y^2+15$

$f_x=3x^2+3y^2+12x=0, f_y=6xy+4y=2y(3x+2)=0$

$f_{xx}=6x+12, f_{xy}=6y, f_{yy}=6x+4$

$f_x=3(x^2+y^2+4x)=0, f_y=2y(3x+2)=0$ から $y=0,\ or\ \ x=-\frac{2}{3}.$

$y=0$ のとき

$f_x=3x(x+4)=0$ から $x=0,\ or\ \ x=-4$ よって $P_1(0,0), P_2(-4,0)$ を得る.

$x=-\frac{2}{3}$ のとき $f_x=3(y^2-\frac{20}{9})=0$ から $y=\pm\frac{2\sqrt{5}}{3}$ よって $P_3(-\frac{2}{3},\frac{2\sqrt{5}}{3}), P_4(-\frac{2}{3},-\frac{2\sqrt{5}}{3})$ を得る.

$f_{xx}=6(x+2)=A,\ \ f_{xy}=6y=B,\ \ f_{yy}=2(3x+2)=C, D=B^2-AC=36y^2-12(x+2)(3x+2)$ とする.

$P_1(0,0)$ のとき $A=12>0, D=-48<0$ よって $f(0,0)=15$ は極小値.

$P_2(-4,0)$ のとき $A=-12<0, D=-240<0$ よって $f(-4,0)=47$ は極大値.

$P_3(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\sqrt{5})$ のとき $A=8, D=80>0$ より極値でない. 同じく $P_4(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\sqrt{5})$ のとき $A=8, D=80>0$ より極値でない.

答　$f(0,0)=15$　極小値, $f(-4,0)=47$　極大値

5.(10 点)

$f(x,y)=x^4-4xy+y^4=0, f_x=4x^3-4y, f_y=-4x+4y^3, f_{xx}=12x^2$

$y'=-\frac{f_x}{f_y}, y''=-\frac{f_{xx}}{f_y}$ である. $y'=0$ より $f_x=4x^3-4y=0$ である. これから $y=x^3$ を得る. これを $f=0$ に代入し $f=x^4(x^8-3)=0$ となる. これより $x=0\ or\ x=\pm 3^{\frac{1}{8}}$ となる. $x=0$ のとき $y=0$　$P_1(0,0)$ これは $f_y=0$ になるため y' が存在しないので除く.　$x=\pm 3^{\frac{1}{8}}$ のとき $y=\pm 3^{\frac{3}{8}}$ となる. $P_2(3^{\frac{1}{8}},3^{\frac{3}{8}})$ は $y''=-\frac{f_{xx}}{f_y}=-\frac{12x^2}{-4x+4y^3}=\frac{3x^2}{x-y^3}=-\frac{3}{2}3^{\frac{1}{8}}<0$ である. よって

極大値をとる． $P_2(-3^{\frac{1}{8}},-3^{\frac{3}{8}})$ は $y''=-\dfrac{f_{xx}}{f_y}=-\dfrac{12x^2}{-4x+4y^3}=\dfrac{3x^2}{x-y^3}=\dfrac{3}{2}3^{\frac{1}{8}}>0$ である．よって

極小値をとる．　　答 $x=3^{\frac{1}{8}}$ のとき極大値 $y=3^{\frac{3}{8}}$，　$x=-3^{\frac{1}{8}}$ のとき極小値 $y=-3^{\frac{3}{8}}$

6.(10 点)

$g=x^2+y^2-1=0, f=x^3+xy^2+x^2y+y^3$ であるから，

$F=f+\lambda g=x^3+xy^2+x^2y+y^3+\lambda(x^2+y^2-1)$ とおく．

$F_\lambda=x^2+y^2-1=0, F_x=3x^2+y^2+2xy+\lambda(2x)=0, F_y=2xy+x^2+3y^2+\lambda(2y)=0$ より

$\lambda=-\dfrac{3x^2+y^2+2xy}{2x}=-\dfrac{3y^2+x^2+2xy}{2y}$ である．これより

$(3x^2+y^2+2xy)y=(3y^2+x^2+2xy)x,(y-x)(x^2+y^2)=y-x=0$ を得る．よって，

$x=y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　，　$f=4x^3=\pm\sqrt{2}$

答　$f(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{2}$ が最大値，$f(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2})=-\sqrt{2}$ が最小値

7.(10 点)

$f=z-x^4+x^3y+3xy^3-y^4=0, P(1,2,-9),$

$f_x=-4x^3+3x^2y+3y^3, f_y=x^3+9xy^2-4y^3, f_z=1$

より $f_x=26, f_y=5, f_z=1$

答　接平面　$26(x-1)+5(y-2)+(z+9)=0$，法線 $\dfrac{x-1}{26}=\dfrac{y-2}{5}=z+9$

8.(10 点)

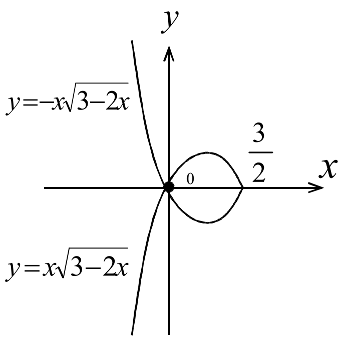
$f=y^2-3x^2+2x^3=0, f_x=-6x+6x^2=0, f_y=2y=0$ から $y=0, f_x=6x(x-1)=0$ である．よって $x=0, or\ x=1$　$f=x^2(-3+2x)=0$ より特異点は $(0,0)$ である．　$f_{xx}=A=-6+12x,$

$f_{xy}=B=0, f_{yy}=C=2, D(x,y)=B^2-AC=12(1-2x), D(0,0)=12>0$ から特異点は結節点である．$y=\pm x\sqrt{3-2x}$ より $x\le\dfrac{3}{2}$ である．$y=x\sqrt{3-2x}, y'=\dfrac{3(1-x)}{\sqrt{3-2x}}$

答　特異点(0,0)は結節点

x	0		1		$\frac{3}{2}$
y'	$+$		0		$-$
y	0	↗	1	↘	0

増減表



グラフ　結節点　(0,0)

9.(10 点)

$f = y-(x-\alpha)^3-(x-\alpha)^2-\alpha, f_\alpha = 3(x-\alpha)^2+2(x-\alpha)-1=(x-\alpha+1)\{3(x-\alpha)-1\}=0$　から

$(x-\alpha)=-1, (x-\alpha)=\frac{1}{3}$ により，$\alpha = x+1, \alpha = x-\frac{1}{3}$　である．これより，

$y = x+1,\ \ y = x-\frac{5}{27}$

つぎに特異点の有無を検証する．

$f_x = -3(x-\alpha)^2-2(x-\alpha)=0, f_y = 1 \neq 0$ より特異点は存在しない．

答　　包絡線は $y = x+1,\quad y = x-\frac{5}{27}$

特異点は存在しない．

10.(10 点)

$x = 3-2t+2t^2, y=\sqrt{1+3t}, z=\frac{2t}{\sqrt{1+t}},\quad x' = -2+4t, y' = \frac{3}{2\sqrt{1+3t}}, z' = \frac{2+t}{(1+t)^{\frac{3}{2}}},$

$t=1$ のとき　$x(1)=3, y(1)=2, z(1)=\sqrt{2}\quad x'(1)=2, y'(1)=\frac{3}{4}, z'(1)=\frac{3\sqrt{2}}{4}$ から

答　接線 $\frac{x-3}{2}=\frac{y-2}{\frac{3}{4}}=\frac{z-\sqrt{2}}{\frac{3\sqrt{2}}{4}}$　法平面　$2(x-3)+\frac{3}{4}(y-2)+\frac{3\sqrt{2}}{4}(z-\sqrt{2})=0$