機械システム工学科　　　　　　　　　　2017/6/1

数学 I　　中間試験　　解答

1.(10 点)

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$=\{e^{x+y}\sqrt{x+y}+e^{x+y}\frac{1}{2\sqrt{x+y}}\}2u+\{e^{x+y}\sqrt{x+y}+e^{x+y}\frac{1}{2\sqrt{x+y}}\}v$$

$$=e^{x+y}(\sqrt{x+y}+\frac{1}{2\sqrt{x+y}})(2u+v)$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$=\{e^{x+y}\sqrt{x+y}+e^{x+y}\frac{1}{2\sqrt{x+y}}e^{x+y}\}2v+\{e^{x+y}\sqrt{x+y}+e^{x+y}\frac{1}{2\sqrt{x+y}}\}u$$

$$=e^{x+y}(\sqrt{x+y}+\frac{1}{2\sqrt{x+y}})(u+2v)$$

2.(10 点)

$$f=\frac{1}{\sqrt{1+3x+y}},\ f=f(0,0)+\frac{1}{1!}\{xf_x(0,0)+yf_y(0,0)\}+\frac{1}{2!}\{x^2f_{xx}(0,0)+2xyf_{xy}(0,0)+y^2f_{yy}(0,0)\}+\cdots$$

$$f_x=-\frac{3}{2}(1+3x+y)^{-\frac{3}{2}},f_y=-\frac{1}{2}(1+3x+y)^{-\frac{3}{2}},f_{xx}=\frac{27}{4}(1+3x+y)^{-\frac{5}{2}},f_{xy}=\frac{9}{4}(1+3x+y)^{-\frac{5}{2}},f_{yy}=\frac{3}{4}(1+3x+y)^{-\frac{5}{2}}$$

$f(0,0)=1,f_x(0,0)=-\frac{3}{2},f_y(0,0)=-\frac{1}{2},f_{xx}(0,0)=\frac{27}{4},f_{xy}(0,0)=\frac{9}{4},f_{yy}(0,0)=\frac{3}{4}$ より

$$f=1-\frac{1}{2}(3x+y)+\frac{1}{8}(27x^2+18xy+3y^2)+\cdots=1-\frac{1}{2}(3x+y)+\frac{3}{8}(3x+y)^2+\cdots$$

3.(10 点)

$$4x^3+4y^3y'+4z^3z'=0$$

$$yz+xzy'+xyz'=0$$

$$\begin{cases}y^3y'+z^3z'=-x^3\\xzy'+xyz'=-yz\end{cases}$$

より,

$$y' = \frac{\begin{vmatrix} -x^3 & z^3 \\ -yz & xy \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y^3 & z^3 \\ xz & xy \end{vmatrix}} = \frac{-x^4y + yz^4}{xy^4 - xz^4} = \frac{y(z^4 - x^4)}{x(y^4 - z^4)}, \qquad z' = \frac{\begin{vmatrix} y^3 & -x^3 \\ xz & -yz \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y^3 & z^3 \\ xz & xy \end{vmatrix}} = \frac{x^4z - zy^4}{xy^4 - xz^4} = \frac{z(x^4 - y^4)}{x(y^4 - z^4)}$$

4.(10 点)

$f = x^3 + 12xy^2 + 3x^2 + 12y^2 + 64$

$f_x = 3x^2 + 12y^2 + 6x = 0, f_y = 24xy + 24y = 24y(x+1) = 0$

$f_{xx} = 6x + 6, f_{xy} = 12y, f_{yy} = 24x + 24$

$f_x = 3(x^2 + 4y^2 + 2x) = 0, f_y = 24y(x+1) = 0$ から $y = 0,\ or\ \ x = -1$.

$y = 0$ のとき

$f_x = 3x(x+2) = 0$ から $x = 0,\ or\ \ x = -2$ よって $P_1(0,0), P_2(-2,0)$ を得る.

$x = -1$ のとき $f_x = 3(4y^2 - 1) = 0$ から $y = \pm\frac{1}{2}$ よって $P_3(-1,\frac{1}{2}), P_4(-1,-\frac{1}{2})$ を得る.

$f_{xx} = 6(x+1) = A,\ f_{xy} = 12y = B,\ f_{yy} = 24(x+1) = C, D = B^2 - AC = 144\{y^2 - (x+1)^2\}$ とする.

$P_1(0,0)$ のとき $A = 6 > 0, D = -144 < 0$ よって $f(0,0) = 64$ は極小値.

$P_2(-2,0)$ のとき $A = -6 < 0, D = -144 < 0$ よって $f(-2,0) = 68$ は極大値. $P_3(-1,\frac{1}{2})$ のとき

$A = 0, D = 36 > 0$ より極値でない. 同じく $P_4(-1,-\frac{1}{2})$ のとき $A = 0, D = 36 > 0$ より極値でない.

答 $f(0,0) = 64$ 極小値, $f(-2,0) = 68$ 極大値

5.(10 点)

$f(x,y) = x^3 - 16xy - 8y^3 = 0, f_x = 3x^2 - 16y, f_y = -16x - 24y^2, f_{xx} = 6x$

$y' = -\frac{f_x}{f_y}, y'' = -\frac{f_{xx}}{f_y}$ である. $y' = 0$ より $f_x = 3x^2 - 16y = 0$ である. これから $y = \frac{3x^2}{16}$ を得る.

これを $f = 0$ に代入し $f = -2x^3\{1 + 4(\frac{3}{16})^3 x^3\} = 0$ となる. これより $x = 0\ or\ x = -\frac{4}{3}4^{\frac{2}{3}}$ となる. $x = 0$ のとき $y = 0$ $P_1(0,0)$ これは $f_y = 0$ になるため y' が存在しないので除く.

$x = -\frac{4}{3}4^{\frac{2}{3}}$ のとき $y = \frac{3}{16}x^2 = \frac{4}{3}4^{\frac{1}{3}}$ となる. $P_2(-\frac{4}{3}4^{\frac{2}{3}}, \frac{4}{3}4^{\frac{1}{3}})$ は

$y'' = -\frac{f_{xx}}{f_y} = \frac{6x}{16x + 24y^2} = -\frac{3}{8} < 0$ である.

よって $x=-\frac{4}{3}4^{\frac{2}{3}}$ のとき極大値 $y=\frac{4}{3}4^{\frac{1}{3}}$ となる．　　答 $x=-\frac{4}{3}4^{\frac{2}{3}}$ のとき極大値 $y=\frac{4}{3}4^{\frac{1}{3}}$

6.(10 点)

$g=x^4+y^4-1=0, f=xy$ であるから，$F=f+\lambda g=xy+\lambda(x^4+y^4-1)$ とおく．

$F_\lambda=x^4+y^4-1=0, F_x=y+\lambda(4x^3)=0, F_y=x+\lambda(4y^3)=0$ より

$\lambda=-\frac{y}{4x^3}=-\frac{x}{4y^3}$ である．これより $y^4=x^4$ を得る．よって，$y=\pm x$ である．

$y=x$ のとき $y=x=\pm\frac{1}{2^{\frac{1}{4}}}$，$f=xy=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$y=-x$ のとき $x=\pm\frac{1}{2^{\frac{1}{4}}}, y=\mp\frac{1}{2^{\frac{1}{4}}}$，$f=xy=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

答　$f(\pm\frac{1}{2^{\frac{1}{4}}},\pm\frac{1}{2^{\frac{1}{4}}})=\frac{\sqrt{2}}{2}$ が最大値，$f(\pm\frac{1}{2^{\frac{1}{4}}},\mp\frac{1}{2^{\frac{1}{4}}})=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ が最小値　（複号同順）

7.(10 点)

$f=z-x^4+2x^3y-6x^2y^2+3xy^3-y^4=0, P(1,1,3)$,
$f_x=-4x^3+6xy^2-12xy^2+3y^3, f_y=2x^3-12x^2y+9xy^2-4y^3, f_z=1$

より $f_x=-7, f_y=-5, f_z=1$

答　接平面　$-7(x-1)-5(y-1)+(z-3)=0$，法線 $\frac{x-1}{-7}=\frac{y-1}{-5}=z-3$

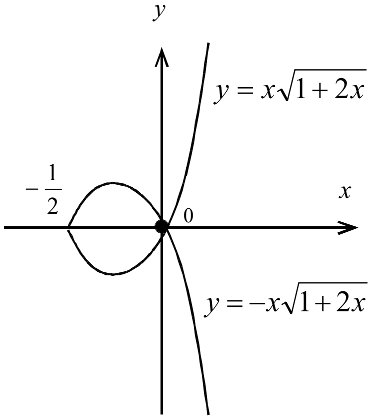
8.(10 点)

$f=y^2-x^2-2x^3=0, f_x=-2x-6x^2=0, f_y=2y=0$ から $y=0, f_x=-2x(1+3x)=0$ である．よって $x=0, or\ x=-\frac{1}{3}$　$f=-x^2(1+2x)=0$ より特異点は $(0,0)$ である．$f_{xx}=A=-2-12x$, $f_{xy}=B=0, f_{yy}=C=2, D(x,y)=B^2-AC=4(6x+1), D(0,0)=4>0$ から特異点は結節点である．$y=\pm x\sqrt{1+2x}$ より $x\geq-\frac{1}{2}$ である．$y=x\sqrt{1+2x}, y'=\frac{1+3x}{\sqrt{1+2x}}$

答　特異点(0,0)は結節点

x	$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{3}$		0
y'		$-$	0	$+$	
y	0	↘	$-\frac{\sqrt{3}}{9}$	↗	0

増減表



グラフ　結節点 (0,0)

9.(10 点)

$f=y-\frac{1}{3}(x-\alpha)^3-4\alpha, f_\alpha=(x-\alpha)^2-4=0$ から $(x-\alpha)=\pm 2$ により，$\alpha=x\mp 2$ である．これを，$y=\frac{1}{3}(x-\alpha)^3+4\alpha$

に代入する．

$y=4x-\frac{16}{3}, 4x+\frac{16}{3}$

つぎに特異点の有無を検証する．

$f_x=-(x-\alpha)^2=0, f_y=1\neq 0$ より特異点は存在しない．

答　　包絡線は $y=4x-\frac{16}{3}, y=4x+\frac{16}{3}$

　　　特異点は存在しない．

10.(10 点)

$x=1+3t-t^2, y=\frac{1}{\sqrt{1+t+t^2}}, z=\sqrt{1+t}$

$x'=3-2t, y'=-\frac{1}{2}(1+t+t^2)^{-\frac{3}{2}}(1+2t), z'=\frac{1}{2\sqrt{1+t}}$，$t=1$

のとき

$x(1)=3, y(1)=\frac{\sqrt{3}}{3}, z(1)=\sqrt{2}$　$x'(1)=1, y'(1)=-\frac{\sqrt{3}}{6}, z'(1)=\frac{\sqrt{2}}{4}$ から

答　接線 $(x-3)=\dfrac{y-\frac{\sqrt{3}}{3}}{-\frac{\sqrt{3}}{6}}=\dfrac{z-\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{4}}$　法平面　$(x-3)-\frac{\sqrt{3}}{6}(y-\frac{\sqrt{3}}{3})+\frac{\sqrt{2}}{4}(z-\sqrt{2})=0$