機能高分子工学科　　　　　　　　　　　　　2017/5/31

数学 I　　中間試験　　解答

1.(10 点)

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=\{e^{x+y}\sin(x+y)+e^{x+y}\cos(x+y)\}\cdot 2u+\{e^{x+y}\sin(x+y)+e^{x+y}\cos(x+y)\}v$$

$$=e^{x+y}\{\sin(x+y)+\cos(x+y)\}(2u+v)$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}=\{e^{x+y}\sin(x+y)+e^{x+y}\cos(x+y)\}\cdot 2v+\{e^{x+y}\sin(x+y)+e^{x+y}\cos(x+y)\}u$$

$$=e^{x+y}\{\sin(x+y)+\cos(x+y)\}(u+2v)$$

2.(10 点)

$$f=\log(1+x+2y),\ f=f(0,0)+\frac{1}{1!}\{xf_x(0,0)+yf_y(0,0)\}+\frac{1}{2!}\{x^2f_{xx}(0,0)+2xyf_{xy}(0,0)+y^2f_{yy}(0,0)\}+\cdots$$

$$f_x=\frac{1}{1+x+2y},\ f_y=\frac{2}{1+x+2y},\ f_{xx}=-(1+x+2y)^{-2},\ f_{xy}=-2(1+x+2y)^{-2},\ f_{yy}=-4(1+x+2y)^{-2}$$

$f(0,0)=0,\ f_x(0,0)=1,\ f_y(0,0)=2,\ f_{xx}(0,0)=-1,\ f_{xy}(0,0)=-2,\ f_{yy}(0,0)=-4$ より

$$f(x,y)=0+(x+2y)+\frac{1}{2}(-x^2-4xy-4y^2)+\cdots=(x+2y)-\frac{1}{2}(x+2y)^2+\cdots$$

3.(10 点)

$$2x+2yy'+2zz'=0$$

$$yz+xzy'+xyz'=0$$

$$\begin{cases} yy'+zz'=-x \\ xzy'+xyz'=-yz \end{cases}$$

より,

$$y'=\frac{\begin{vmatrix} -x & z \\ -yz & xy \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y & z \\ xz & xy \end{vmatrix}}=\frac{-yx^2+yz^2}{xy^2-xz^2}=\frac{y(z-x)(z+x)}{x(y-z)(y+z)}$$

$$z'=\frac{\begin{vmatrix} y & -x \\ xz & -yz \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y & z \\ xz & xy \end{vmatrix}}=\frac{-zy^2+zx^2}{xy^2-xz^2}=\frac{z(x-y)(x+y)}{x(y-z)(y+z)}$$

4.(10 点)

$f = x^3 + 3xy^2 - 6x^2 - 2y^2 + 30$
$f_x = 3x^2 + 3y^2 - 12x = 0, f_y = 6xy - 4y = 2y(3x-2) = 0$
$f_{xx} = 6x - 12, f_{xy} = 6y, f_{yy} = 6x - 4$

$f_x = 0, f_y = 0$ から $y = 0,\ or\ \ x = \dfrac{2}{3}$.

$y = 0$ のとき

$f_x = 3x(x-4) = 0$ から $x = 0,\ or\ \ x = 4$ となる．よって $P_1(0,0), P_2(4,0)$ を得る.

$x = \dfrac{2}{3}$ のとき $f_x = 3y^2 - \dfrac{20}{3} = 3(y^2 - \dfrac{20}{9}) = 0$ から $y = \pm\dfrac{2}{3}\sqrt{5}$ となる.

よって $P_3(\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\sqrt{5}), P_4(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{3}\sqrt{5})$ を得る.

$f_{xx} = 6(x-2) = A,\ f_{xy} = 6y = B,\ f_{yy} = 2(3x-2) = C, D = B^2 - AC = 36y^2 - 12(x-2)(3x-2)$
となる.
$P_1(0,0)$ のとき $A = -12 < 0, D = -48 < 0$ よって $f(0,0) = 30$ は極大値.
$P_2(4,0)$ のとき $A = 12 > 0, D = -240 < 0$ よって $f(4,0) = -2$ は極小値.
$P_3(\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\sqrt{5})$ のとき $A = -8, D = 80 > 0$ より極値でない.

$P_4(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{3}\sqrt{5})$ のとき $A = -8, D = 80 > 0$ より極値でない.

答　$f(0,0) = 30$　極大値，$f(4,0) = -2$　極小値

5.(10 点)
$f(x,y) = x^3 - 12xy + y^3 = 0, f_x = 3x^2 - 12y, f_y = -12x + 3y^2, f_{xx} = 6x$
$y' = -\dfrac{f_x}{f_y}, y'' = -\dfrac{f_{xx}}{f_y}$ である．$y' = 0$ より $f_x = 3x^2 - 12y = 0$ である．これから $y = \dfrac{x^2}{4}$ を得る．これを $f = 0$ に代入し $f = x^3\{(\dfrac{3}{32})^3 x^3 - 2\} = 0$ となる．これより $x = 0\ or\ x = 4 \cdot 2^{\frac{1}{3}}$ となる.

$x = 0$ のとき $y = 0$ $P_1(0,0)$ これは $f_y = 0$ となるため y' が存在しないので除く．$x = 4 \cdot 2^{\frac{1}{3}}$ のとき $y = \dfrac{1}{4}x^2 = 4 \cdot 2^{\frac{2}{3}}$ となる．$P_2(4 \cdot 2^{\frac{1}{3}}, 4 \cdot 2^{\frac{2}{3}})$ は $y'' = -\dfrac{f_{xx}}{f_y} = -\dfrac{6x}{-12x + 3y^2} = -\dfrac{1}{2} < 0$ である．よ

って $x=4\cdot 2^{\frac{1}{3}}$ のとき極大値 $y=4\cdot 2^{\frac{2}{3}}$ となる．　答 $x=4\cdot 2^{\frac{1}{3}}$ のとき極大値 $y=4\cdot 2^{\frac{2}{3}}$ をとる．

6.(10 点)

$g=x^4+y^4-34=0, f=x+8y$ であるから， $F=f+\lambda g=x+8y+\lambda(x^4+y^4-34)$ とおく．

$F_\lambda=x^4+y^4-34=0, F_x=1+4x^3\lambda=0, F_y=8+4y^3\lambda=0$ より $\lambda=-\dfrac{1}{4x^3}=-\dfrac{8}{4y^3}$ である．これより $y=2x$ を得る．よって $g=17x^4-34=0$ より $x=\pm 2^{\frac{1}{4}}, y=\pm 2\cdot 2^{\frac{1}{4}}$ となる．このとき　$f=\pm 17\cdot 2^{\frac{1}{4}}$ となる．

答　$f(2^{\frac{1}{4}}, 2\cdot 2^{\frac{1}{4}})=17\cdot 2^{\frac{1}{4}}$ が最大値，$f(-2^{\frac{1}{4}}, -2\cdot 2^{\frac{1}{4}})=-17\cdot 2^{\frac{1}{4}}$ が最小値

7.(10 点)

$f=z-x^4-3x^2y^2-5y^4=0, P(1,1,9), f_x=-4x^3-6xy^2, f_y=-6x^2y-20y^3, f_z=1$

より $f_x=-10, f_y=-26, f_z=1$

答　接平面　$-10(x-1)-26(y-1)+(z-9)=0$，法線 $\dfrac{x-1}{-10}=\dfrac{y-1}{-26}=z-9$

8.(10 点)

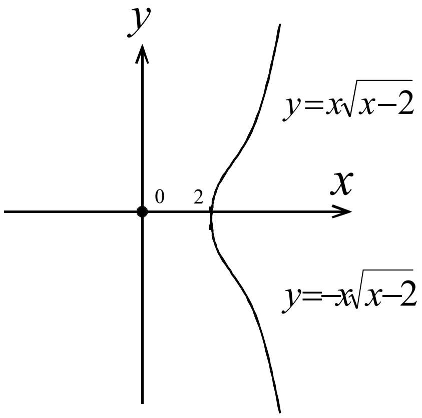
$f=y^2-x^3+2x^2=0, f_x=-3x^2+4x=0, f_y=2y=0$ から $y=0, f_x=x(4-3x)=0$ である．よって $x=0, or\ x=\dfrac{4}{3}$　$f=x^2(2-x)=0$ より特異点は $(0,0)$ である．
$f_{xx}=A=-6x+4,$

$f_{xy}=B=0, f_{yy}=C=2, D(x,y)=B^2-AC=-2(-6x+4), D(0,0)=-8<0$ から特異点は孤立点である． $y=\pm x\sqrt{x-2}$ より $x\geq 2$ である． $y=x\sqrt{x-2}, y'=\dfrac{3x-4}{2\sqrt{x-2}}$

答　特異点(0,0)は孤立点

x	0		2	
y'				+
y	0		0	↗

増減表



グラフ　孤立点　(0,0)

9.(10 点)

$f = y-(x-\alpha)^3-12\alpha x^2, f_\alpha = 3(x-\alpha)^2-12x^2 = 0$ から $(x-\alpha)^2 = 4x^2$ により，

$\alpha = -x$ or $3x$ である．これを，$y=(x-\alpha)^3+12\alpha x^2$ に代入すれば，

$y=(x+x)^3-12x^3=-4x^3$, $y=(x-3x)^3+36x^3=28x^3$

となる．つぎに特異点の有無を検証する．

$f_x = -3(x-\alpha)^3-24\alpha x = 0, f_y = 1 \neq 0$ より特異点は存在しない．

答　包絡線は $y=-4x^3$ および $y=28x^3$

特異点は存在しない．

10.(10 点)

$x = 2+3t+t^2, y = \dfrac{1}{\sqrt{1+t}}, z = \sqrt{1+2t}$

$x' = 3+2t, y' = -\dfrac{1}{2}(1+t)^{-\frac{3}{2}}, z' = (1+2t)^{-\frac{1}{2}}$，$t=1$ のとき

$x(1)=6, y(1)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, z(1)=\sqrt{3}$　$x'(1)=5, y'(1)=-\dfrac{\sqrt{2}}{8}, z'(1)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ から

答　接線 $\dfrac{x-6}{5} = \dfrac{y-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{8}} = \dfrac{z-\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}}$ 法平面 $5(x-6)-\dfrac{\sqrt{2}}{8}(y-\dfrac{\sqrt{2}}{2})+\dfrac{\sqrt{3}}{3}(z-\sqrt{3})=0$