2017/7/24

電気電子工学科

数学 I　　期末試験　　解答

1.(20 点)

$V=\iint_D zdxdy=\iint_D (x^2+3xy)dxdy$, $D:(x-2)^2+(y-1)^2\le 1$ を $x-2=u, y-1=v$ とおいて変換する． $D':u^2+v^2\le 1, |J|=1$ である．

$V=\iint_{D'}\{(u+2)^2+3(u+2)(v+1)\}dudv$ さらに $u=r\cos\theta, v=r\sin\theta$ とおいて極座標変換を使う． $D'':0\le r\le 1, 0\le\theta\le 2\pi, |J|=r$ である．

$$V=\iint_{D''}\{(r\cos\theta+2)^2+3(r\cos\theta+2)(r\sin\theta+1)\}rdrd\theta$$
$$=\int_0^1 dr\int_0^{2\pi} d\theta(r^2\cos^2\theta+3r^2\cos\theta\sin\theta+7r\cos\theta+3r\sin\theta+10)r$$

ここで θ から先に積分すれば

$$\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta=4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\pi, \int_0^{2\pi}\cos\theta\sin\theta d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{\sin 2\theta}{2}d\theta=\left[-\frac{\cos 2\theta}{4}\right]_0^{2\pi}=0$$

, $\int_0^{2\pi}\cos\theta d\theta=\int_0^{2\pi}\sin\theta d\theta=0, \int_0^{2\pi}d\theta=2\pi$　であるから,

$$V=\int_0^1(r^2\pi+20\pi)rdr=\pi\int_0^1(r^3+20r)dr=\frac{\pi}{4}+10\pi=\frac{41}{4}\pi$$

$$V=\frac{41}{4}\pi$$

2.(20 点)

求める曲面積は $z>0$ の領域と $z<0$ の領域に同一の曲面積があるから, $z>0$ の領域の曲面積を 2 倍する．

$S=2\iint_D\sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2}dxdy$ ここで極座標変換 $(x=r\cos\theta, y=r\sin\theta)$ を使う．

$D:x^2+y^2\le 3x$ から $r^2\le 3r\cos\theta$ より， $D':0\le r\le 3\cos\theta, -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ となる． 一方 $x^2+y^2+z^2=9$ から $z=\sqrt{9-r^2}$ である． これより $z_r=-\frac{r}{\sqrt{9-r^2}}, z_\theta=0$ となる．

$$S=2\iint_{D'}\sqrt{r^2+(rz_r)^2+(z_\theta)^2}\,drd\theta=2\iint_{D'}\sqrt{r^2+\frac{r^4}{9-r^2}}\,drd\theta=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{3\cos\theta}\frac{3r}{\sqrt{9-r^2}}dr$$

$9-r^2=t$ とおく． $-2rdr=dt, rdr=-\dfrac{dt}{2}$ である．

$$S=6\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_9^{9-9\cos^2\theta}\frac{1}{\sqrt{t}}\left(-\frac{dt}{2}\right)=3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{9\sin^2\theta}^{9}\frac{dt}{\sqrt{t}}=3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\left[\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_{9\sin^2\theta}^{9}=6\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(3-\sqrt{9\sin^2\theta})d\theta$$

$$=18\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-|\sin\theta|)d\theta=36\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta)d\theta=36\left[\theta+\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=36\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=18(\pi-2)$$

$S=18(\pi-2)$

3.(20 点)

$S=2\pi\int_2^5 y\sqrt{1+(y')^2}dx$ である． $y^2=6x-x^2$ より， $y=\sqrt{6x-x^2}, y'=\dfrac{6-2x}{2\sqrt{6x-x^2}}$ である．

$$S=2\pi\int_2^5\sqrt{6x-x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{(3-x)^2}{6x-x^2}}dx=2\pi\int_2^5\sqrt{9}dx=18\pi$$

$S=18\pi$

4.(20 点)

幾何学的対称性から重心は $\bar{x}=\bar{y}=\bar{z}$ である．球面座標変換を使う．

$$E':0\le r\le 4, 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}, 0\le\phi\le\frac{\pi}{2}$$

$$M=\iiint_E\rho dxdydz=k\iiint_E dxdydz=k\iiint_{E'}r^2\sin\theta drd\theta d\phi$$

$$=k\left(\int_0^4 r^2dr\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\phi\right)=k\frac{64}{3}\cdot 1\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{32}{3}\pi k$$

$$\bar{z}=\frac{1}{M}\iiint_E\rho z dxdydz$$

$$\bar{z}=\frac{1}{M}\iiint_{E'}kr\cos\theta\cdot r^2\sin\theta drd\theta d\phi=\frac{k}{M}\int_0^4 dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\phi r^3\cos\theta\sin\theta$$

$$=\frac{k}{M}\left(\int_0^4 r^3dr\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta d\theta\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\phi\right)=\frac{\pi k}{2M}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^4\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi k}{2M}\cdot\frac{4^4}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{16\pi k}{M}=\frac{3}{2}$$

$G(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2})$

5.(20 点)

球面座標変換より， $x=r\sin\theta\cos\phi, y=r\sin\theta\sin\phi, E':0\le r\le 3,0\le\theta\le\frac{\pi}{2},0\le\phi\le 2\pi$

である.

$$I_z=\iiint_E \rho(x,y,z)(x^2+y^2)dxdydz$$

$$=k\int_0^3 dr\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{2\pi} d\phi(r^2\sin^2\theta\cos^2\phi+r^2\sin^2\theta\sin^2\phi)r^2\sin\theta=k(\int_0^3 r^4 dr)(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta d\theta)(\int_0^{2\pi} d\phi)$$

$$=k\cdot\frac{3^5}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 2\pi=\frac{324}{5}\pi k$$

$I_z=\frac{324}{5}\pi k$