2017/7/25

機械システム工学科

数学 I　　期末試験　　解答

1.(20 点)

$V=\iint_D zdxdy=\iint_D (x^2+5xy)dxdy$，$D:(x-3)^2+(y-2)^2\le 1$ を $x-3=u, y-2=v$ とおいて変換する.　$D':u^2+v^2\le 1, |J|=1$ である.

$V=\iint_{D'}\{(u+3)^2+5(u+3)(v+2)\}dudv$ さらに $u=r\cos\theta, v=r\sin\theta$ とおいて極座標変換を使う.　$D'':0\le r\le 1, 0\le\theta\le 2\pi, |J|=r$ である.

$$V=\iint_{D''}\{(r\cos\theta+3)^2+5(r\cos\theta+3)(r\sin\theta+2)\}rdrd\theta$$
$$=\int_0^1 dr\int_0^{2\pi} d\theta(r^2\cos^2\theta+5r^2\cos\theta\sin\theta+16r\cos\theta+15r\sin\theta+39)r$$

ここで θ から先に積分すれば

$$\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta=4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\pi, \int_0^{2\pi}\cos\theta\sin\theta d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{\sin 2\theta}{2}d\theta=\left[-\frac{\cos 2\theta}{4}\right]_0^{2\pi}=0$$

, $\int_0^{2\pi}\cos\theta d\theta=\int_0^{2\pi}\sin\theta d\theta=0, \int_0^{2\pi}d\theta=2\pi$　であるから,

$$V=\int_0^1(r^2\pi+78\pi)rdr=\pi\int_0^1(r^3+78r)dr=\frac{\pi}{4}+39\pi=\frac{157}{4}\pi$$

$V=\frac{157}{4}\pi$

2.(20 点)

xy 平面に対する正射影 D は $0\le z\le 4, x^2+y^2=4z$ より，$x^2+y^2\le 16$ である.
極座標変換 $(x=r\cos\theta, y=r\sin\theta)$ を使う.

$z=\frac{1}{4}r^2, z_r=\frac{1}{2}r, z_\theta=0, D':0\le r\le 4, 0\le\theta\le 2\pi$ である.

$$S=\iint_{D'}\sqrt{r^2+(rz_r)^2+(z_\theta)^2}drd\theta=\int_0^4 dr\int_0^{2\pi}d\theta\sqrt{r^2+\frac{1}{4}r^4}=2\pi\int_0^4 r\sqrt{1+\frac{1}{4}r^2}dr$$

$1+\frac{1}{4}r^2=u$ とおく.　$du=\frac{1}{2}rdr$ である.

$$S=2\pi\int_1^5\sqrt{u}\,2du=4\pi\int_1^5\sqrt{u}\,du=4\pi\left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^5=\frac{8}{3}(5\sqrt{5}-1)\pi$$

$$S=\frac{8}{3}(5\sqrt{5}-1)\pi$$

3.(20 点)

$S=2\pi\int_1^6 y\sqrt{1+(y')^2}\,dx$ である． $y^2=8x-x^2$ より， $y=\sqrt{8x-x^2},\ y'=\dfrac{8-2x}{2\sqrt{8x-x^2}}$ である．

$$S=2\pi\int_1^6\sqrt{8x-x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{(4-x)^2}{8x-x^2}}\,dx=2\pi\int_1^6\sqrt{16}\,dx=40\pi$$

$$S=40\pi$$

4.(20 点)

幾何学的性質から重心は z 軸上にある． $\bar{x}=\bar{y}=0$ である．球面座標変換を使う．

$$E':0\le r\le 4,0\le\theta\le\frac{\pi}{2},0\le\phi\le 2\pi$$

$$M=\iiint_E\rho\,dxdydz=k\iiint_E dxdydz=k\iiint_{E'}r^2\sin\theta\,drd\theta d\phi$$

$$=k(\int_0^4 r^2dr)(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta)(\int_0^{2\pi}d\phi)=k\frac{64}{3}\cdot 1\cdot 2\pi=\frac{128}{3}\pi k$$

$$\bar{z}=\frac{1}{M}\iiint_E\rho z\,dxdydz$$

$$\bar{z}=\frac{1}{M}\iiint_{E'}kr\cos\theta\cdot r^2\sin\theta\,drd\theta d\phi=\frac{k}{M}\int_0^4 dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\pi}d\phi r^3\cos\theta\sin\theta$$

$$=\frac{k}{M}(\int_0^4 r^3dr)(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta d\theta)(\int_0^{2\pi}d\phi)=\frac{2\pi k}{M}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^4\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2\pi k}{M}\cdot\frac{4^4}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{64\pi k}{M}=\frac{3}{2}$$

$$G(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,0,\frac{3}{2})$$

5.(20 点)

球面座標変換より， $x=r\sin\theta\cos\phi,\ y=r\sin\theta\sin\phi,\ E':0\le r\le 3,0\le\theta\le\pi,0\le\phi\le\dfrac{\pi}{2}$

である．

$$I_z=\iiint_E\rho(x,y,z)(x^2+y^2)\,dxdydz$$

$$= k\int_0^3 dr\int_0^{\pi} d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi(r^2\sin^2\theta\cos^2\phi + r^2\sin^2\theta\sin^2\phi)r^2\sin\theta = k(\int_0^3 r^4 dr)(\int_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta)(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi)$$

$$= k\cdot\frac{3^5}{5}\cdot 2(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta d\theta)\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3^5}{5}\cdot 2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\pi k = \frac{162}{5}\pi k$$

$$I_z = \frac{162}{5}\pi k$$