2017/7/24

機能高分子工学科

数学 I　　期末試験　　解答

1.(20 点)

$V=\iint_D zdxdy=\iint_D(2x^2+xy)dxdy$, $D:(x-2)^2+(y-1)^2\le 1$ を $x-2=u, y-1=v$ とおいて変換する.　$D':u^2+v^2\le 1, |J|=1$ である.

$V=\iint_{D'}\{2(u+2)^2+(u+2)(v+1)\}dudv$ さらに $u=r\cos\theta, v=r\sin\theta$ とおいて極座標変換を使う.　$D'':0\le r\le 1, 0\le\theta\le 2\pi, |J|=r$ である.

$V=\iint_{D''}\{2(r\cos\theta+2)^2+(r\cos\theta+2)(r\sin\theta+1)\}rdrd\theta$

$=\int_0^1 dr\int_0^{2\pi}d\theta(2r^2\cos^2\theta+r^2\cos\theta\sin\theta+9r\cos\theta+2r\sin\theta+10)r$

ここで θ から先に積分すれば

$\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta=4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\pi, \int_0^{2\pi}\cos\theta\sin\theta d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{\sin 2\theta}{2}d\theta=\left[-\frac{\cos 2\theta}{4}\right]_0^{2\pi}=0$

, $\int_0^{2\pi}\cos\theta d\theta=\int_0^{2\pi}\sin\theta d\theta=0, \int_0^{2\pi}d\theta=2\pi$　であるから,

$V=\int_0^1(2r^2\pi+20\pi)rdr=\pi\int_0^1(2r^3+20r)dr=\frac{\pi}{2}+10\pi=\frac{21}{2}\pi$　　　$V=\frac{21}{2}\pi$

2.(20 点)

求める曲面積は $z>0$ の領域と $z<0$ の領域に同一の曲面積があるから, $z>0$ の領域の曲面積を 2 倍する.

$S=2\iint_D\sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2}dxdy$ ここで極座標変換 $(x=r\cos\theta, y=r\sin\theta)$ を使う.

$D:x^2+y^2\le 2x$ から $r^2\le 2r\cos\theta$ より, $D':0\le r\le 2\cos\theta, -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ となる. 一方

$x^2+y^2+z^2=4$ から $z=\sqrt{4-r^2}$ である. これより $z_r=-\frac{r}{\sqrt{4-r^2}}, z_\theta=0$ となる.

$$S=2\iint_{D'}\sqrt{r^2+(rz_r)^2+(z_\theta)^2}\,drd\theta=2\iint_{D'}\sqrt{r^2+\frac{r^4}{4-r^2}}\,drd\theta=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\frac{2r}{\sqrt{4-r^2}}dr$$

$4-r^2=t$ とおく．$-2rdr=dt, rdr=-\dfrac{dt}{2}$ である．

$$S=4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_4^{4-4\cos^2\theta}\frac{1}{\sqrt{t}}(-\frac{dt}{2})=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{4\sin^2\theta}^{4}\frac{dt}{\sqrt{t}}=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\left[\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_{4\sin^2\theta}^{4}=4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(2-\sqrt{4\sin^2\theta})d\theta$$

$$=8\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-|\sin\theta|)d\theta=16\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta)d\theta=16\left[\theta+\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=16(\frac{\pi}{2}-1)=8(\pi-2)$$

$$S=8(\pi-2)$$

3.(20 点)

$S=2\pi\int_1^3 y\sqrt{1+(y')^2}dx$ である．$y^2=4x-x^2$ より，$y=\sqrt{4x-x^2}, y'=\dfrac{4-2x}{2\sqrt{4x-x^2}}$ である．

$$S=2\pi\int_1^3\sqrt{4x-x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{(4-2x)^2}{4(4x-x^2)}}dx=2\pi\int_1^3\sqrt{\frac{16}{4}}dx=4\pi\int_1^3 dx=8\pi$$

$$S=8\pi$$

4.(20 点)

幾何学的性質から重心は z 軸上にある．よって $\bar{x}=\bar{y}=0$ である．球面座標変換を使えば,

$$z=r\cos\theta, E':0\le r\le 2, 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}, 0\le\phi\le 2\pi$$

$$M=\iiint_E\rho dxdydz=k\iiint_E dxdydz=k\iiint_{E'}r^2\sin\theta drd\theta d\phi$$

$$=k(\int_0^2 r^2dr)(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta)(\int_0^{2\pi}d\phi)=k\frac{8}{3}\cdot 1\cdot 2\pi=\frac{16}{3}\pi k$$

となる．

$$\bar{z}=\frac{1}{M}\iiint_E\rho z dxdydz$$

$$\bar{z}=\frac{1}{M}\iiint_{E'}kr\cos\theta\cdot r^2\sin\theta drd\theta d\phi=\frac{k}{M}\int_0^2dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\pi}d\phi r^3\cos\theta\sin\theta$$

$$=\frac{k}{M}(\int_0^2 r^3dr)(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta d\theta)(\int_0^{2\pi}d\phi)=\frac{2\pi k}{M}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2\pi k}{M}\cdot\frac{16}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{4\pi k}{M}=\frac{3}{4}$$

$$G(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,0,\frac{3}{4})$$

5.(20 点)

球面座標変換より， $x=r\sin\theta\cos\phi, y=r\sin\theta\sin\phi, E':0\le r\le 2,0\le\theta\le\frac{\pi}{2},0\le\phi\le\frac{\pi}{2}$

である.

$$I_z=\iiint_E\rho(x,y,z)(x^2+y^2)dxdydz$$

$$=k\int_0^2 dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\phi(r^2\sin^2\theta\cos^2\phi+r^2\sin^2\theta\sin^2\phi)r^2\sin\theta=k(\int_0^2 r^4dr)(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta d\theta)(\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\phi)$$

$$=k\cdot\frac{2^5}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{32}{15}\pi k$$

$$I_z=\frac{32}{15}\pi k$$