数学 I　レポート　No.10　　　　　　　2017 年度

1.　つぎの重積分を求めよ.

(1)

$$I=\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy \qquad D: x^2+y^2\le a^2, 0\le y\le x\ \ (a>0)$$

(2)

$$I=\iiint_E \frac{z^2 e^{-(x^2+y^2+z^2)}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dx\,dy\,dz \qquad E: a^2\le x^2+y^2+z^2\le b^2 \quad (b>a>0)$$

(3)

$$I=\iiint_E xz\,dx\,dy\,dz \qquad E: x^2+y^2+z^2\le a^2, x^2+y^2\le a\,x,\ \ z\ge 0 \quad (a>0)$$

（ヒント：円柱座標変換を使う.）

(4)

$$I=\iiint_E x^2y^2\mathrm{z}^2\,dx\,dy\,dz \qquad E: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1 \quad (a>0, b>0, c>0)$$

（ヒント： $x=au, y=bv, z=cw$ とした後，球面座標変換を使う.）

2.つぎの広義積分を求めよ.

(1)

$$I=\iiint_E \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2-z^2}}dxdydz \qquad E: x^2+y^2+z^2\le 4$$

(2)

$$I=\iiint_E \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{(4+x^2+y^2+z^2)^3}dxdydz \qquad E: x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$$

3.つぎの体積を求めよ.

(1)

2 つの円柱 $x^2+z^2=4,\ \mathrm{y}^2+z^2=4$　の共通部分の体積

(2)

球 $x^2+y^2+z^2=9$ と円柱 $x^2+y^2=3x$　の共通部分の体積

(3)

2 つの曲面 $x^2+y^2=6z$, $x^2+y^2=2x$ と 1 つの平面 $z=0$ で囲まれた部分の体積

4.つぎの面積を求めよ

(1)

平面 $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=1$　が座標面によって切り取られる部分の平面積

(2)

球面$x^2+y^2+z^2=4$によって切り取られる円柱$x^2+y^2=2x$ の側面の部分の曲面積
（ヒント： xz 面に対する正射影を考える.）

(3)

$y=2x^3, 0\le x\le a \quad (a>0)$を$x$軸まわりに回転した場合の回転体の曲面積

5.密度が一様な場合，つぎの立体の部分Eの重心$G(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$を求めよ.

(1)

$$E: \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}\le 1, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$$

(2)

$$E: 0\le z\le x^2+y^2, x^2+y^2\le 2x$$

6. 密度が一様な場合$(\rho=k)$，つぎの立体の部分Eの慣性能率を求めよ.

(1)

$E: x^2+y^2+z^2\le 4, z\ge 0$ の部分を$(3,0,0)$を通りz軸に平行な直線lのまわりに回転するときの慣性能率I_l

（ヒント ： $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta d\theta=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{2}{3} & (n\ge 3\text{奇数}) \\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2} & (n\ge 2\text{偶数})\end{cases}$ ）

(2)

$E: \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}+\dfrac{z^2}{2}\le 1, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$ の部分をz軸のまわりに回転するときの慣性能率I_z