数学 I　レポート　No.3　　　　　　　　2017 年度

(定理 6.1) 関数の極値

関数 $z = f(x, y)$ で，$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ とする．$A = f_{xx}(a,b), B = f_{xy}(a,b), C = f_{yy}(a,b)$，

$D = B^2 - AC$ とおくとき，

(1) $A > 0, D < 0$ ならば $f(a,b)$ は極小値

(2) $A < 0, D < 0$ ならば $f(a,b)$ は極大値

(3) $D > 0$ ならば $f(a,b)$ は極値でない．

$D = 0$ の場合は，極値になることも極値にならないこともあるから，高次の微係数をとり，吟味する必要がある．□

1. つぎの関数の極値を調べ，極値をとる座標 (x, y) とそのときの極値 $f(x, y)$ および極小値か極大値かを答えよ．
   (1) $f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2 + 5x - y + 6$
   (2) $f(x, y) = x^3 + 6xy^2 + 2x^2 + 3y^2 + 8$
   (3) $f(x, y) = (2x^2 + 5y^2)e^{-x^2-2y^2}$

(定理 6.2) 陰関数の極値

連立方程式 $f(x, y) = 0, f_x(x, y) = 0$ の解 $(x, y) = (a,b)$ に対して $y'' = -\dfrac{f_{xx}(a,b)}{f_y(a,b)} > 0\ (< 0)$

ならば y は極小値（極大値）b をとる．$f_y(x, y) = 0$ の点は y' が存在しないから除外する．

□

2. つぎの陰関数の極値を調べ，極値をとる座標 x とそのときの極値 y および極小値か極大値かを答えよ．
   (1) $f(x, y) = x^5 - 10xy + 2y^5 = 0$
   (2) $f(x, y) = x + 3y - e^{2x+y} = 0$

(定理 6.3) ラグランジュの乗数法

条件 $g(x, y) = 0$ での $f(x, y)$ の極値を与える座標は $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$ を考え，

連立方程式　$F_\lambda = g(x, y) = 0, F_x = f_x(x, y) + \lambda g_x(x, y) = 0, F_y = f_y(x, y) + \lambda g_y(x, y) = 0$

を満たす解に含まれる．ただし，必要条件であるが，十分条件ではない．□

3. $g(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 8 = 0$ の条件で次の関数の最大値，最小値およびそのときの座標を求めよ．
   (1) $f(x, y) = x^2 + 2y^2$
   (2) $f(x, y) = x^4 + y^4$