数学I　レポート No.3　解答　　　　　　　　　　2017 年度

1.(20 点×3)

(1)

$f = x^2 + xy + 2y^2 + 5x - y + 6, f_x = 2x + y + 5, f_y = x + 4y - 1, f_{xx} = A = 2, f_{xy} = B = 1,$
$f_{yy} = C = 4$　である.

$f_x = 0, f_y = 0$ より $x = -3, y = 1$ を得る．$A > 0, D = B^2 - AC = -7 < 0, f(-3,1) = -2$ より

$f(-3,1) = -2$ は極小値である.

(2)

$f = x^3 + 6xy^2 + 2x^2 + 3y^2 + 8, f_x = 3x^2 + 6y^2 + 4x, f_y = 12xy + 6y = 6y(2x + 1),$
$f_{xx} = A = 6x + 4, f_{xy} = B = 12y, f_{yy} = C = 12x + 6$

$f_x = 0, f_y = 0$ を解いて極値の候補は $(0,0), (-\frac{4}{3},0), (-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{30}}{12}), (-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{30}}{12})$ となる.

$(0,0)$ の場合，$A = 4 > 0, D = B^2 - AC = -24 < 0, f(0,0) = 8$ は極小値である.

$(-\frac{4}{3},0)$ の場合，$A = -4 < 0, D = B^2 - AC = -40 < 0, f(-\frac{4}{3},0) = \frac{248}{27}$ は極大値である.

$(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{30}}{12})$ の場合，$A = 1 > 0, D = B^2 - AC = 30 > 0$ より極値でない.

$(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{30}}{12})$ の場合，$A = 1 > 0, D = B^2 - AC = 30 > 0$ より極値でない.

(3)

$f = (2x^2 + 5y^2)e^{-x^2-2y^2}, f_x = 2x(2 - 2x^2 - 5y^2)e^{-x^2-2y^2}, f_y = 2y(5 - 4x^2 - 10y^2)e^{-x^2-2y^2},$

$f_{xx} = A = 2(2 - 10x^2 - 5y^2 + 4x^4 + 10x^2y^2)e^{-x^2-2y^2}, f_{xy} = B = 4xy(-9 + 4x^2 + 10y^2)e^{-x^2-2y^2},$

$f_{yy} = C = 2(5 - 4x^2 - 50y^2 + 16x^2y^2 + 40y^4)e^{-x^2-2y^2}$ である．$D = B^2 - AC$ とおく.

$f_x = 0, f_y = 0$ の解より $(0,0), (0,\frac{\sqrt{2}}{2}), (0,-\frac{\sqrt{2}}{2}), (1,0), (-1,0)$ が極値の候補となる.

$f(0,0) = 0$ は $A = 4 > 0, D = -40 < 0$ より極小値である.

$f(0,\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{5}{2e}$ は $A = -\frac{1}{e} < 0, D = -\frac{20}{e^2} < 0$ より極大値である.

$f(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{5}{2e}$ は $A = -\frac{1}{e} < 0, D = -\frac{20}{e^2} < 0$ より極大値である.

$(1,0)$ は $A=-\dfrac{8}{e}<0, D=\dfrac{16}{e^2}>0$ より極値でない． $(-1,0)$ は $A=-\dfrac{8}{e}<0, D=\dfrac{16}{e^2}>0$ より極値でない．

2.(10 点×2)

(1) $f_x=5(x^4-y), f_y=10(y^4-x), f_{xx}=20x^3$ である． $f=x^5-10xy+2y^5=0, f_x=0$ より，

極値の候補として $(0,0),(2^{\frac{2}{5}},2^{\frac{3}{5}})$ を得る． $(0,0)$ は $f_y=0$ であるから除く．

$(2^{\frac{2}{5}},2^{\frac{3}{5}})$ の場合 $f=0, y'=-\dfrac{f_x}{f_y}=0, y''=-\dfrac{f_{xx}}{f_y}=-\dfrac{2x^3}{y^4-x}=-\dfrac{2}{3}2^{\frac{4}{5}}<0$ より

$x=2^{\frac{2}{5}}$ で $y=2^{\frac{3}{5}}$ は極大値である．

(2) $f_x=1-2e^{2x+y}, f_y=3-e^{2x+y}, f_{xx}=-4e^{2x+y}$ である． $f=0, y'=-\dfrac{f_x}{f_y}=0$ より

$x+3y=\dfrac{1}{2}, 2x+y=-\log 2$ を得る．これより $x=-\dfrac{1+6\log 2}{10}, y=\dfrac{1+\log 2}{5}$

$y''=-\dfrac{f_{xx}}{f_y}=\dfrac{4}{5}>0$ より $x=-\dfrac{1+6\log 2}{10}$ のとき $y=\dfrac{1+\log 2}{5}$ は極小値である．

3. (10 点×2)

(1) $g(x,y)=0$ が (x,y) の有界閉集合であり $f(x,y)$ が (x,y) の連続関数であることは明らかである．よって $f(x,y)$ は最大値，最小値を持つ． $F=f+\lambda g=x^2+2y^2+\lambda(x^2+xy+y^2-8)$ において，

$F_\lambda=x^2+xy+y^2-8=0, F_x=2x+\lambda(2x+y)=0, F_y=4y+\lambda(x+2y)=0$ より

$\lambda=-\dfrac{2x}{2x+y}=-\dfrac{4y}{x+2y}$ である．これから $x^2-2xy-2y^2=0$ を得る．よって $x=(1\pm\sqrt{3})y$ となる．

$x=(1+\sqrt{3})y, x^2+xy+y^2=8$ から $\{\pm\dfrac{4\sqrt{3}}{3},\pm\dfrac{2(3-\sqrt{3})}{3}\}$ のとき $f=x^2+2y^2=\dfrac{16(3-\sqrt{3})}{3}$ となる．一方

$x=(1-\sqrt{3})y, x^2+xy+y^2=8$ から $\{\mp\dfrac{4\sqrt{3}}{3},\pm\dfrac{2(3+\sqrt{3})}{3}\}$ のとき $f=x^2+2y^2=\dfrac{16(3+\sqrt{3})}{3}$ となる．これより，つぎの結果を得る． $\{\mp\dfrac{4\sqrt{3}}{3},\pm\dfrac{2(3+\sqrt{3})}{3}\}$ のとき最大値 $f=\dfrac{16(3+\sqrt{3})}{3}$ をとる．

および $\{\pm\dfrac{4\sqrt{3}}{3},\pm\dfrac{2(3-\sqrt{3})}{3}\}$ のとき最小値 $f=\dfrac{16(3-\sqrt{3})}{3}$ をとる．

(2) $g(x,y)=0$ が (x,y) の有界閉集合であり $f(x,y)$ が (x,y) の連続関数であることは明らかである．よって $f(x,y)$ は最大値，最小値を持つ． $F=f+\lambda g=x^4+y^4+\lambda(x^2+xy+y^2-8)$ において，

$F_\lambda=x^2+xy+y^2-8=0,\ F_x=4x^3+\lambda(2x+y)=0, F_y=4y^3+\lambda(x+2y)=0$ より

$\lambda = -\dfrac{4x^3}{2x+y} = -\dfrac{4y^3}{x+2y}$ である．これから $(x-y)(x+y)^3 = 0$ となる．よって $y = \pm x$ となる．

$y = x, x^2 + xy + y^2 = 8$ から $(\pm\dfrac{2}{3}\sqrt{6}, \pm\dfrac{2}{3}\sqrt{6})$ のとき $f = x^4 + y^4 = \dfrac{128}{9}$ となる．一方 $y = -x$,

$x^2 + xy + y^2 = 8$ から $(\pm 2\sqrt{2}, \mp 2\sqrt{2})$ のとき $f = x^4 + y^4 = 128$ となる．よって，つぎの結果を得る．

$(\pm 2\sqrt{2}, \mp 2\sqrt{2})$ のとき最大値 $f = 128$ をとる．および $(\pm\dfrac{2}{3}\sqrt{6}, \pm\dfrac{2}{3}\sqrt{6})$ のとき最小値 $f = \dfrac{128}{9}$ をとる．