数学 I　レポート　No.4　　　　2017 年度

(関数の連続性)

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$　が成り立つとき，関数 $f(x,y)$ は点 (a,b) で連続であるという．　□

1.　つぎの関数は点 $(x,y)=(0,0)$ で連続か不連続かを判定せよ．

(1) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2+2y^2}{x\sin x+2y\sin y} & ,(x,y)\neq(0,0) \\ 1 & ,(x,y)=(0,0) \end{cases}$　(2) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3y+3xy^3}{x^4+3y^4} & ,(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ,(x,y)=(0,0) \end{cases}$

(接平面と法線)

曲面 $f(x,y,z)=0$ 上の点 $P_0(a,b,c)$ における接平面の方程式は

$$f_x(a,b,c)(x-a)+f_y(a,b,c)(y-b)+f_z(a,b,c)(z-c)=0$$

点 $P_0(a,b,c)$ における法線の方程式は

$$\frac{x-a}{f_x(a,b,c)}=\frac{y-b}{f_y(a,b,c)}=\frac{z-c}{f_z(a,b,c)}$$　□

2.　つぎの曲面で( )で与えられた点における接平面と法線の方程式を求めよ．

(1) $2(x-1)^2+\dfrac{(y-2)^2}{3}+\dfrac{(z-3)^2}{2}=\dfrac{11}{2}$　,点　(2,5,4)

(2) $z=2\sin(x+y)+\dfrac{\log(1+xy)}{1+x^2+y^2}$　,点　(0,0,0)

(特異点)

曲線 $f(x,y)=0$ 上の点 (a,b) で $f(a,b)=f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ であるとき，点 (a,b) を特異点

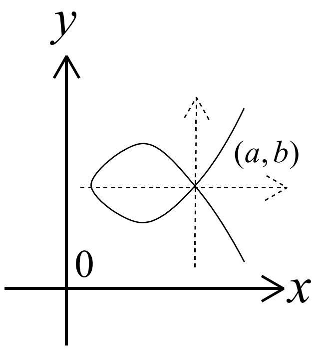
という． $A=f_{xx}(a,b), B=f_{xy}(a,b), C=f_{yy}(a,b), D=B^2-AC$ とおく． $D>0$ のとき　結節点，

$D<0$ のとき　孤立点， $D=0$ のとき　尖点（センテン）（第 1 種尖点，第 2 種尖点），自接点，その他の場合となる． $D=0$ の場合は (a,b) での近傍での挙動 $y-b=g(x-a)$ を調べ吟味する必要がある．　□

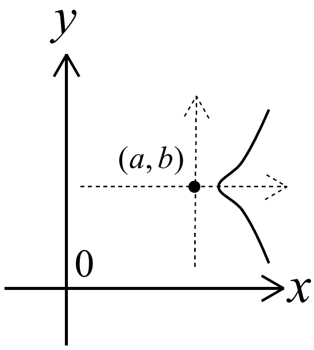
3.　つぎの曲線の特異点を求め，種類とその近傍における形状を示せ．

(1) $y^2=x^2-3x^3$

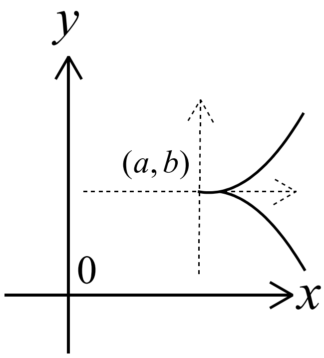
(2) $y^2=2x^3-x^2$



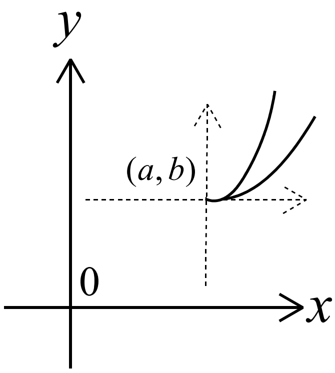
結節点 $(D>0)$



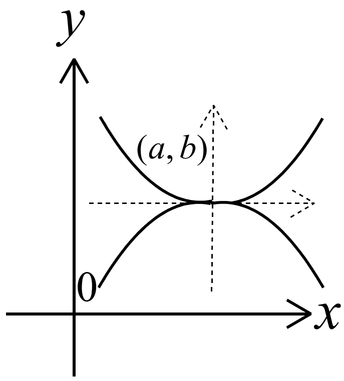
孤立点　$(D<0)$



第１種尖点$(D=0)$



第２種尖点$(D=0)$



自接点$(D=0)$

(包絡線)

曲線群 $f(x,y,\alpha)=0$ において, 二つの関係式　$f(x,y,\alpha)=0$, $f_\alpha(x,y,\alpha)=0$ から α を消去して得られる関係式　$R(x,y)=0$ は包絡線となる．ただし，特異点がある場合は特異点の軌跡も $R(x,y)=0$ を満たす．包絡線か特異点の軌跡かは吟味する必要がある．□

4.　つぎの曲線群の包絡線を求めよ．

(1)　$y=(x-\alpha)^2+2\alpha^2$

(2)　$(x-\alpha)^2+(x-\alpha)(y-\alpha)+2(y-\alpha)^2=1$

(空間曲線の接線と法平面)

空間曲線 $x=x(t), y=y(t), z=z(t)$ の上の点 $A(x(t_0),y(t_0),z(t_0))$ における接線の方程式は

$$\frac{x-x(t_0)}{x'(t_0)}=\frac{y-y(t_0)}{y'(t_0)}=\frac{z-z(t_0)}{z'(t_0)}$$

点 $A(x(t_0),y(t_0),z(t_0))$ における法平面の方程式

$$x'(t_0)(x-x(t_0))+y'(t_0)(y-y(t_0))+z'(t_0)(z-z(t_0))=0$$

□

5.　つぎの空間曲線上の[ ]で与えた t における点での接線と法平面の方程式を求めよ．

(1)　$x=\log(1+t^2), y=\dfrac{\sin(\pi t)}{3+t^2}, z=2t+1, \quad [t=1]$

(2)　$x=1+t+4t^3, y=\dfrac{1+t}{1+2t^2+3t^4}, z=\sqrt{4+t+2t^2}, \quad [t=0]$