1.(10 点×2)

(1) $y = mx$ とおく.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+2y^2}{x\sin x + 2y\sin y} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+2m^2x^2}{x\sin x + 2mx\sin mx} = \lim_{x\to 0}\frac{1+2m^2}{(\frac{\sin x}{x}) + 2m(\frac{\sin mx}{x})} = \frac{1+2m^2}{1+2m^2} = 1$$

よって連続である.　　答　連続

(2) $y = mx$ とおく.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y+3xy^3}{x^4+3y^4} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3mx+3xm^3x^3}{x^4+3m^4x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{x^4(m+3m^3)}{x^4(1+3m^4)} = \frac{m(1+3m^2)}{1+3m^4} \neq 0$$

m の値によって多くの値をとる.　よって不連続である.　　答　不連続

2.(10 点×2)

(1)

$$f(x,y,z) = 2(x-1)^2 + \frac{(y-2)^2}{3} + \frac{(z-3)^2}{2} - \frac{11}{2},\ f_x = 4(x-1),\ f_y = \frac{2(y-2)}{3},\ f_z = (z-3)$$

接点 $(2,5,4)$ では $f_x = 4, f_y = 2, f_z = 1$ となる．よって接平面は

$4(x-2)+2(y-5)+(z-4)=0$ となる.　　法線は $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-5}{2} = \dfrac{z-4}{1}$ である.

(2)

$$f(x,y,z) = z - 2\sin(x+y) - \frac{\log(1+xy)}{1+x^2+y^2},$$

$$f_x = -2\cos(x+y) - \frac{y}{1+xy}(1+x^2+y^2)^{-1} - \log(1+xy)(-1)(1+x^2+y^2)^{-2}2x,$$

$$f_y = -2\cos(x+y) - \frac{x}{1+xy}(1+x^2+y^2)^{-1} - \log(1+xy)(-1)(1+x^2+y^2)^{-2}2y,\ f_z = 1,\ \text{接点}(0,0,0)$$

$f_x = -2, f_y = -2, f_z = 1$ となる．よって接平面は $-2x-2y+z=0$ となる.

法線は $\dfrac{x}{-2} = \dfrac{y}{-2} = z$ である.

3.(10 点×2)

(1) $f = y^2 - x^2 + 3x^3,\ f_x = -2x + 9x^2,\ f_y = 2y,\ f_{xx} = A = -2 + 18x,\ f_{xy} = B = 0,\ f_{yy} = C = 2$ である.

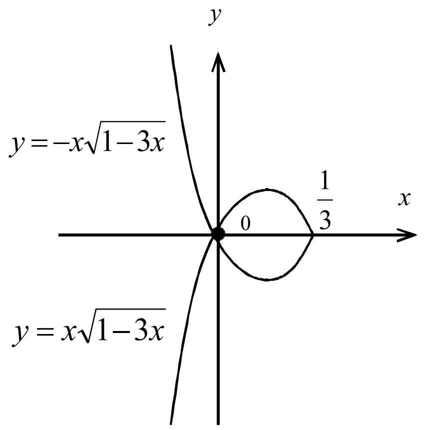
$f = f_x = f_y = 0$ より，$(0,0)$ が特異点である．$D = B^2 - AC = 4 > 0$ より結節点である.

グラフは $y^2 = x^2 - 3x^3 = x^2(1-3x) \geq 0$ より $x \leq \dfrac{1}{3}$ である． $y = \pm x\sqrt{1-3x}$, $y = x\sqrt{1-3x}, (x \leq \dfrac{1}{3})$

$y' = \dfrac{2-9x}{2\sqrt{1-3x}}$ より増減表とグラフは増減表(3-1)，グラフ(3-1)となる．

x	0		$\frac{2}{9}$		$\frac{1}{3}$
y'		+	0	−	
y	0	↗	$\frac{2\sqrt{3}}{27}$	↘	0

増減表（3-1）



グラフ(3-1)　結節点(0,0)

(2)　$f = y^2 + x^2 - 2x^3, f_x = 2x - 6x^2, f_y = 2y, f_{xx} = A = 2 - 12x, f_{xy} = B = 0, f_{yy} = C = 2$ である．

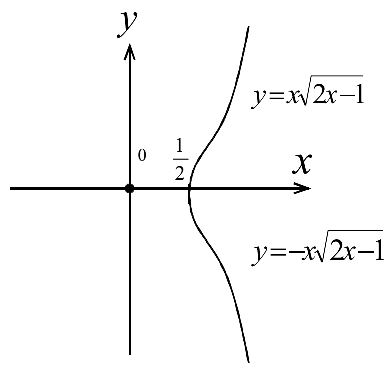
$f = f_x = f_y = 0$ より，(0,0) が特異点である． $D = B^2 - AC = -4 < 0$ より孤立点である．

グラフは $y^2 = 2x^3 - x^2 = x^2(2x-1) \geq 0$ より $x \geq \dfrac{1}{2}$ である． $y = \pm x\sqrt{2x-1}$, $y = x\sqrt{2x-1}, (x \geq \dfrac{1}{2})$

$y' = \dfrac{3x-1}{\sqrt{2x-1}}$ より増減表とグラフは増減表(3-2)，グラフ(3-2)となる．

x	0	$\frac{1}{2}$	
y'		$+\infty$	+
y	0	0	↗

増減表(3-2)



グラフ(3-2)　孤立点(0,0)

4.(10 点×2)

(1)　$f = y - (x-\alpha)^2 - 2\alpha^2 = 0, f_\alpha = 2(x - 3\alpha) = 0$ より $\alpha = \dfrac{x}{3}$ である．これを $f = 0$ に代入すれば

$R(x, y) = y - \dfrac{2}{3}x^2 = 0$ を得る．特異点があるかどうかを調べる． $f_x = -2(x-\alpha), f_y = 1$ より，

$f = f_x = f_y = 0$ を満たす解は存在しない．よって特異点は存在しない．包絡線は　$y = \dfrac{2}{3}x^2$ である．

(2) $f = (x-\alpha)^2 + (x-\alpha)(y-\alpha) + 2(y-\alpha)^2 - 1 = 0, f_\alpha = -(3x+5y-8\alpha) = 0$ より $\alpha = \dfrac{3x+5y}{8}$ である．

これを $f = 0$ に代入すれば $R(x, y) = \dfrac{7}{16}(y-x)^2 - 1 = 0$ となる．よって $y = x \pm \dfrac{4\sqrt{7}}{7}$ を得る．特異点があるかどうかを調べる．$f_x = 2(x-\alpha) + (y-\alpha) = 0, f_y = (x-\alpha) + 4(y-\alpha) = 0$ より $x = \alpha, y = \alpha$ となる．これを $f = 0$ に代入すれば，$f(\alpha, \alpha) = -1 \neq 0$ であるから $f = f_x = f_y = 0$ を満たす解は存在しない．故に特異点は存在しない．包絡線は　$y = x \pm \dfrac{4\sqrt{7}}{7}$ である．

5.(10 点×2)

(1)　$x'(t) = \dfrac{2t}{1+t^2}, y'(t) = \dfrac{\pi(3+t^2)\cos\pi t - 2t\sin\pi t}{(3+t^2)^2}, z'(t) = 2$ である．

$x(1) = \log(2), y(1) = 0, z(1) = 3, x'(1) = 1, y'(1) = -\dfrac{\pi}{4}, z'(1) = 2$ となる．これより，接線は

$\dfrac{x-\log 2}{1} = \dfrac{y}{-\frac{\pi}{4}} = \dfrac{z-3}{2}$，法平面は $(x-\log 2) - \dfrac{\pi}{4}y + 2(z-3) = 0$ となる．

(2) $x'(t) = 1 + 12t^2, y'(t) = \dfrac{1-4t-2t^2-12t^3-9t^4}{(1+2t^2+3t^4)^2}, z'(t) = \dfrac{1+4t}{2\sqrt{4+t+2t^2}}$

$x(0) = 1, y(0) = 1, z(0) = 2, x'(0) = 1, y'(0) = 1, z'(0) = \dfrac{1}{4}$ 接線は $x-1 = y-1 = \dfrac{z-2}{\frac{1}{4}}$，

法平面は $(x-1) + (y-1) + \dfrac{1}{4}(z-2) = 0$ となる．