数学 I　レポート　No.7　　　　　2017 年度

1.　かっこの中に適当な数式を入れよ.

(1)

極座標変換 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta\ (r \geq 0)$ によって $r\theta$ 平面の集合 D' が xy 平面の集合 D に 1 対 1 の対応で移るとすれば次式が成立する.

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)(\ ①\ )$$

(2)

円柱座標変換 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z\ (r \geq 0)$ によって (r,θ,z) の動く集合 D' が (x,y,z) の動く集合 D に 1 対 1 の対応で移るとき次式が成立する.

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\ (\ ②\ )$$

(3)

球面座標変換 $x = r\sin\theta\cos\phi, y = r\sin\theta\sin\phi, z = r\cos\theta\ (r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi)$ によって (r,θ,ϕ) が動く集合 D' が (x,y,z) の動く集合 D に 1 対 1 の対応で移るとき次式が成立する.

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{D'} f(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)\ (\ ③\ )$$

2.極座標変換を使ってつぎの積分を求めよ.

(1)

$$I = \iint_D xy\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy \qquad D: 1 \leq x^2+y^2 \leq 4, 0 \leq x \leq y$$

(2)

$$I = \iint_D \sin\{\frac{\pi(\sqrt{x^2+y^2})}{4}\}dxdy \quad D: 0 \leq x^2+y^2 \leq 1$$

3. 円柱座標変換を使ってつぎの積分を求めよ.

(1)

$$I = \iiint_D \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dxdydz \qquad D: 1 \leq x^2+y^2 \leq 16,\ 0 \leq z \leq 2$$

(2)

$$I = \iiint_D z\sin\{\frac{\pi(x^2+y^2+z^2)}{4}\}dxdydz \quad D: 0 \leq x^2+y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1$$

4. 球面座標変換を使ってつぎの積分を求めよ.

(1)

$$I=\iiint_D xe^{(x^2+y^2+z^2)}dxdydz \qquad D:0\le x^2+y^2+z^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$$

(2)

$$I=\iiint_D \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dxdydz \qquad D:1\le x^2+y^2+z^2\le 16, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$$

5.つぎの広義積分を求めよ.

(1)

$$I=\iint_D \frac{x}{x^2+y^2}dxdy \qquad D:0\le x^2+y^2\le 4, 0\le y\le x$$

($D_\varepsilon:\varepsilon^2\le x^2+y^2\le 4, 0\le y\le x$ として極座標変換を使う.)

(2)

$$I=\iiint_D \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^3}dxdydz \qquad D:1\le x^2+y^2+z^2, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$$

($D_a:1\le x^2+y^2+z^2\le a^2, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$ として球面座標変換を使う.)

6. つぎの広義積分を求めよ.

(領域を適当に変換し一旦普通の積分になおす.)

(1)

$$I=\iint_D \frac{xy\log(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy \qquad D:0\le x^2+y^2\le 4, x\ge 0, y\ge 0$$

(2)

$$I=\iiint_D \frac{ze^{-(x^2+y^2+z^2)}}{x^2+y^2+z^2}dxdydz \qquad D:1\le x^2+y^2+z^2, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$$