1.　つぎのかっこの中に適当な数式を入れよ．

(1)

xy 平面上の集合 D において，各点 (x, y) の密度が $\rho(x, y)$ で与えられるとき
D の質量 M は次式で与えられる．

$$M = \iint_D \ (\ ①\ )$$

D の重心 $G(\bar{x}, \bar{y})$ の座標は次式で与えられる．

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\iint_D \ (\ ②\ )\ ,\ \ \bar{y} = \frac{1}{M}\iint_D \ (\ ③\ )$$

(2)

xyz 空間の集合 E において，各点 (x, y, z) の密度が $\rho(x, y, z)$ で与えられるとき
E の質量 M は次式で与えられる．

$$M = \iiint_E \ (\ ④\ )$$

E の重心 $G(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ の座標は次式で与えられる．

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\iiint_E \ (\ ⑤\ )\ ,\ \ \bar{y} = \frac{1}{M}\iiint_E \ (\ ⑥\ )\ ,\ \ \bar{z} = \frac{1}{M}\iiint_E \ (\ ⑦\ )$$

2.密度が一様な場合，つぎの平面の部分 D の重心 $G(\bar{x}, \bar{y})$ を求めよ．

(1)

D:　$x^2 \le y \le 5x^2$,　$1 \le x \le 2$

(2)

D:　$\dfrac{x^2}{4} + y^2 \le 1,\ \ x \ge 1,\ \ y \ge 0$

3. 密度が一様な場合，つぎの立体の部分 E の重心 $G(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ を求めよ．

(1)

E:　$x^2 + y^2 + z^2 \le 1,\ \ x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$

(2)

E:　$x^2 + y^2 \le z \le 2 - x - y$

（ヒント：xy 平面への正射影は $x^2 + y^2 = 2 - x - y$ である.）

4.密度が中心からの距離に反比例するとき$\left(\rho = \dfrac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, k>0\right)$，つぎの領域の重心$G(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$を求めよ．

(1)

$E:\ x^2+y^2+z^2 \le 1,\ y \ge 0, z \ge 0$

(2)

$E:\ x^2+y^2+z^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$

5.つぎのかっこの中に適当な数式を入れよ．

(1)

xy平面上の領域Dにおいて，各点(x, y)の密度が$\rho(x, y)$とし空間にある定直線lまでの距離を$p(x, y)$とする．このとき定直線lのまわりの慣性能率I_lは次式で与えられる．

$$I_l = \iint_D \quad (\ ①\ )$$

とくに，座標軸のまわりの慣性能率は次式になる．

$$I_x = \iint_D \ (\ ②\ ),\ I_y = \iint_D \ (\ ③\ ),\ I_z = \iint_D \ (\ ④\ )$$

(2)

xyz空間の領域Eにおいて, 各点(x, y, z)の密度が$\rho(x, y, z)$とし定直線lまでの距離を$p(x, y, z)$とする．このとき定直線lのまわりの慣性能率I_lは次式で与えられる．

$$I_l = \iiint_E \quad (\ ⑤\ )$$

とくに，座標軸のまわりの慣性能率は次式になる．

$$I_x = \iiint_E \ (\ ⑥\ ),\ I_y = \iiint_E \ (\ ⑦\ ),\ I_z = \iiint_E \ (\ ⑧\ )$$

(3)

物体Eの定直線lのまわりの慣性能率をI_lとし，Eの重心を通ってlに平行な直線l_0のまわりのEの慣性能率をI_0とする．lとl_0の間の距離をa, Eの質量をMとすればI_lとI_0の間につぎの関係がある．

$$I_l = I_0 + (\ ⑨\ )$$

6.密度が一様な場合$(\rho = k)$，つぎの領域について慣性能率I_x, I_y, I_zを求めよ．

(1) $D:\ 0 \le y \le x\sqrt{x},\ 0 \le x \le a \qquad (a>0)$

(2) $E:\ x^2+y^2+z^2 \le a^2, y \ge 0, z \ge 0 \quad (a>0)$