数学Ⅲレポート　No.2　(2016)

1. (ダランベールの判定法)

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad (a_n > 0)$ は

(i) $\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) < 1$ ならば収束する.

(ii) $\underline{\lim_{n\to\infty}}\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) > 1$ ならば発散する. □

(不定形の極限値の計算法，ロピタルの定理)

$\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}$ になる場合　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{g(n)}{f(n)} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{g'(n)}{f'(n)}$　である. □

つぎの級数の収束発散を判定せよ.

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{3^n}{5^n + n}$　(2) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{7^n}{3^{2n}+1}$　(3) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{e^n}{n^2+1}$　(4) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{4^{-n}}{n^3+1}$

2. (係数比判定法，ダランベールの公式)

ベキ級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ で 係数 a_n が 0 にならず，つぎの比の極限が存在すれば，ρ は収束半径である.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \rho$$

このとき，$|z| < \rho$ で絶対収束し，$|z| > \rho$ で発散する. □

つぎのベキ級数の収束半径を求めよ.

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^n + n^2} z^n$　(2) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{(n+2)\log(n^2+2)}$　(3) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n+3)!}{(2n+1)!} z^n$　(4) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{4^n}{n^4+1} z^n$

3. (コーシー・アダマールの公式)

ベキ級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の収束半径 ρ は次式で与えられる.

$$\frac{1}{\rho} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$$

ただし，$\dfrac{1}{\infty} = 0, \dfrac{1}{0} = \infty$ とする. □

つぎのベキ級数の収束半径を求めよ.

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{(3n-1)} z^n$　(2) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{3^{-(7n^2+5n+3)}}{n^2+2} z^n$