数学Ⅲレポート　No.4　(2016)

1. つぎの複素関数が正則かどうか判定せよ.

(1) $f(z)=(x^2-y^2+3x)+i(2xy+3y)$

(2) $f(z)=(x^3-3y^2x+2x^2-2y^2+y)+i(3x^2y-y^3+4xy+x)$

2. $z=x+iy, f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ とする. $u(x,y)$ が次式であるとき, $f(z)$ が正則となるように $v(x,y)$ を定め, $f(z)$ を z の関数として求めよ.

(1) $u(x,y)=x^4-6x^2y^2+y^4+x^3-3xy^2$, $f(0)=0$

(2) $u(x,y)=x\sin(x)\cosh(y)-y\cos(x)\sinh(y)$, $f(0)=0$

(双曲線関数： $\cosh(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\sinh(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$)

3. $z=x+iy, f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ とする. $v(x,y)$ が次式であるとき, $f(z)$ が正則となるように $u(x,y)$ を定め, $f(z)$ を z の関数として求めよ.

(1) $v(x,y)=-\sin(2x)\sinh(2y)$, $f(0)=1$

(2) $v(x,y)=\arctan(\dfrac{y}{1+x})$, $f(0)=0$

4. $z=x+iy, f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ とする. $z=x+iy, f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ とする. つぎの関数 $f(z)$ が正則となるように, 実定数 k_1,k_2,k_3 を定め, $f(z)$ を z の関数として求めよ.

(1) $f(z)=(x^3-3xy^2+k_1x^2-3y^2+5x)+i(3x^2y-y^3+k_2xy+k_3y)$

(2) $f(z)=\dfrac{2x+k_2}{(x+k_1)^2+y^2}+i\dfrac{k_3y}{(x+k_1)^2+y^2}$, $f(0)=2$