数学Ⅲレポート　No.5　(2016)

1.　(コーシーの積分定理)

$f(z)$ が単純閉曲線 C 内の領域で正則であれば，C に沿った周回積分はゼロである．

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

（留数定理）

$f(z)$ は単純閉曲線 C の内部に孤立特異点 $c_1, c_2, \cdots, c_N$ を持つほかは C の内部および周を含めて正則とする．このとき次式が成り立つ．

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{N} \operatorname*{Res}_{z=c_j} f(z)dz$$

(留数計算)

孤立特異点 c_j が単純極の場合，留数は次式で与えられる．

$$\operatorname*{Res}_{z=c_j} f(z)dz = \lim_{z \to c_j} (z - c_j) f(z)$$

（例）

つぎの複素積分を計算せよ．

$$\oint_C \frac{1}{z^2+1}dz \qquad C : |z-i| = 1$$

（解）

$z^2+1=0$ から，$z = \pm i$，領域内の孤立特異点は単純極の $z = i$ である．

$$\oint_C \frac{1}{z^2+1}dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} f(z)dz = 2\pi i \lim_{z \to i}(z-i)\frac{1}{z^2+1} = 2\pi i \lim_{z \to i}\frac{1}{2z} = \pi$$

（問題）

例を参考にしてつぎの複素積分を求めよ．

(1)　$\displaystyle\oint_C \frac{1}{z^2+z+1}dz \qquad C : |z-i| = 1$

(2)　$\displaystyle\oint_C \frac{1}{z^4+3z^2+2}dz \qquad C : |z-2i| = 2$

(3)　$\displaystyle\oint_C \frac{z}{z^3+1}dz \qquad C : |z-1-i| = 1$

(4)　$\displaystyle\oint_C \frac{\sin z}{z^2+1}dz \qquad C : |z| = 2$

(5)　$\displaystyle\oint_C \frac{\cos z}{z^4+1}dz \qquad C : |z-1| = 1$