数学Ⅲレポート　No.6　(2016)

1.　（複素積分の実定積分への応用：その 1）

（定理 4.20）

$f(z)$ が $\mathrm{Im}(z)>0$ で有限個の極 $c_1, c_2, \cdots, c_N$ を持ち，実軸上に極を持たないとする．$0 \le \theta \le \pi$ で一様に $R\,f(R\,e^{i\theta}) \to 0\,(R \to \infty)$ となるとき，次の関係が成立する．

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{N} \operatorname*{Res}_{z=c_j} f(z)dz$$

積分路 C は Fig.1 に示すとおりである．

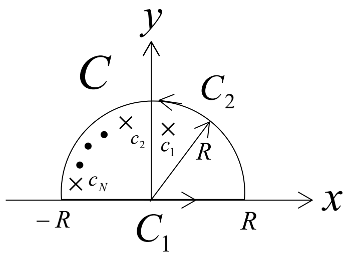

Fig.1　積分路 $C = C_2 C_1$

（例）

つぎの実定積分を求めよ．

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+3} dx$$

（解）

$f(z) = \dfrac{1}{z^2+2z+3}$ の極は $z^2+2z+3=0$ より，$z=-1 \pm i\sqrt{2}$ である．$\mathrm{Im}(z)>0$ の極は $z=c_1=-1+i\sqrt{2}$ である．また $R\,f(R\,e^{i\theta}) = \dfrac{R}{(R\,e^{i\theta})^2+2(R\,e^{i\theta})+3} \to 0\,(R\to\infty)$ である．よって

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+3} dx = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=c_1} f(z)dz = 2\pi i \lim_{z\to c_1} (z-c_1)\frac{1}{z^2+2z+3} = 2\pi i \lim_{z\to c_1} \frac{1}{2z+2}$$

$$= \frac{\pi i}{c_1+1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

（問題）例を参考にしてつぎの実定積分を求めよ．

(1)　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+5} dx$

(2)　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2}{x^4+1} dx$

(3)　$\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x^2+4}{x^4+6x^2+5} dx$　（$f(x)$ は偶関数である．）

(4)　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2+3x+1}{x^4+5x^2+4} dx$

(5)　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^8+1} dx$