1.　（複素積分の実定積分への応用：その 2）

（定理 4.21）$S=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos mx\,dx\,,T=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin mxdx$　　(1)

において $J=S+iT$ とおく．これらの積分はつぎの条件が成立するとき(2)式で与えられる．

(1) $m>0$ である．

(2) $0\le\theta\le\pi$ で一様に $f(R\,e^{i\theta})\to 0\,(R\to\infty)$　である．

(3) $f(x)$ は実軸上に極を持たない．

$$J=S+iT=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos mx\,dx+i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin mx\,dx=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{imx}dx=\oint_C f(z)e^{imz}dz \qquad (2)$$

ただし，積分路 C は下図のように選ぶものとする．　□

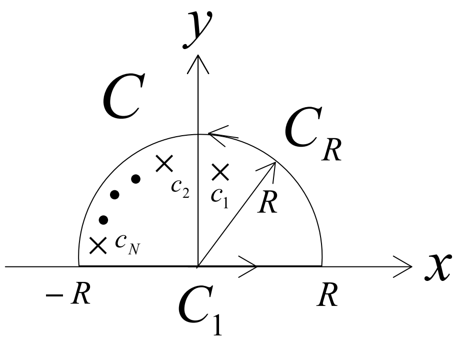

Fig.1　積分路 C

（例）

$S=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\pi x}{x^2+1}dx$　を求めよ．

（解）

$f(x)=\frac{1}{x^2+1}$,(1) $m=\pi>0$,(2) $f(R\,e^{i\theta})\to 0\,(R\to\infty)$,(3) $x^2+1=0$,

$x=\pm i$ より，実軸に極はない．$\mathrm{Im}(z)>0$ の極は $z=c_1=i$ である．よって

$$J=S+iT=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\pi x}{x^2+1}dx+i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\pi x}{x^2+1}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\pi x}}{x^2+1}dx=\oint_C\frac{e^{i\pi z}}{z^2+1}dz=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=c_1}\left(\frac{e^{i\pi z}}{z^2+1}\right)dz$$

$$=2\pi i\lim_{z\to c_1}\{(z-c_1)\frac{e^{i\pi z}}{z^2+1}\}=2\pi i\lim_{z\to c_1}\frac{e^{i\pi z}+(z-c_1)e^{i\pi z}i\pi}{2z}=2\pi i\times\frac{e^{i\pi c_1}}{2c_1}=2\pi i\times\frac{e^{i^2\pi}}{2i}=\pi e^{-\pi}$$

よって $S=\mathrm{Re}(J)=\pi e^{-\pi}$

（問題）例を参考にしてつぎの積分を求めよ．

(1) $S=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\pi x}{x^2+2x+2}dx$　(2) $S=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos\pi x}{x^2+4x+5}dx$　(3) $T=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin\pi x}{x^2+4x+5}dx$

(4) $S=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\pi x}{x^4+10x^2+9}dx$　(5) $T=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin\pi x}{x^4+5x^2+4}dx$