1.（複素積分の実定積分への応用：その 3）

（定理 4.22）三角関数の積分について，つぎの関係が成り立つ．

$$J=\int_0^{2\pi} f(\cos\theta,\sin\theta)d\theta=\oint_C f(\frac{z+z^{-1}}{2},\frac{z-z^{-1}}{2i})\frac{dz}{zi} \qquad \square$$

（例）$J=\int_0^{2\pi}\frac{1}{5+4\sin\theta}d\theta$ を求めよ．

（解）　$\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}, z=e^{i\theta}, \sin\theta=\frac{z-z^{-1}}{2i}, dz=e^{i\theta}id\theta, d\theta=\frac{dz}{iz}$ より，

$J=\oint_{|z|=1}\frac{1}{5+4\times\frac{z-z^{-1}}{2i}}\times\frac{dz}{iz}=\oint_{|z|=1}\frac{1}{2z^2+5iz-2}dz$, $2z^2+5iz-2=0$ から，極は

$z=-2i,-\frac{i}{2}$ である．$|z|=1$ の領域内に含まれる極は $z=c_1=-\frac{i}{2}$ である．

$$J=2\pi i\lim_{z\to c_1}(z-c_1)\frac{1}{2z^2+5iz-2}=2\pi i\lim_{z\to c_1}\frac{1}{4z+5i}=2\pi i\frac{1}{4c_1+5i}=\frac{2}{3}\pi$$

（問題）例を参考にしてつぎの積分を求めよ．

(1) $J=\int_0^{2\pi}\frac{1}{6+5\cos\theta}d\theta$　(2) $J=\int_0^{2\pi}\frac{\sin\theta}{6+5\cos\theta}d\theta$　(3) $J=\int_0^{2\pi}\frac{1}{8+7\cos\theta}d\theta$

(4) $J=\int_0^{2\pi}\frac{2+\sin\theta}{4+3\cos\theta}d\theta$　(5) $J=\int_0^{2\pi}\frac{3+\cos\theta}{6+3\sin\theta}d\theta$

2. (ローラン展開)

（定理 4.16）$f(z)$ が領域 $D=\{z|r_1<|z-c|<r_2\}$ で正則ならば，一様収束する級数

$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-c)^n$ に展開できる．ここで，$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\substack{|\zeta-c|=r\\ r_1<r<r_2}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{n+1}}d\zeta$ である．$\square$

（例）$f(z)=\frac{3z+1}{z^2-7z+10}$ を $D=\{z|3<|z|<4\}$ の領域でローラン展開せよ．

（解）$f(z)$ を部分分数に展開しテイラー展開を使う．$f(z)=\frac{3z+1}{(z-2)(z-5)}=\frac{\alpha_1}{z-2}+\frac{\alpha_2}{z-5}$

$$\alpha_1=\lim_{z\to 2}(z-2)\frac{3z+1}{(z-2)(z-5)}=-\frac{7}{3}, \alpha_2=\lim_{z\to 5}(z-5)\frac{3z+1}{(z-2)(z-5)}=-\frac{16}{3}$$

$$f(z)=\frac{\alpha_1}{z-2}+\frac{\alpha_2}{z-5}=\frac{-\frac{7}{3}}{z(1-\frac{2}{z})}+\frac{-\frac{16}{3}}{5(\frac{z}{5}-1)}=-\frac{7}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}+\frac{16}{15}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{7\cdot 2^n}{6})z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{16}{15\cdot 5^n})z^n$$

（問題）例を参考にしてつぎの関数を指定の領域でローラン展開せよ．

(1) $f(z)=\frac{4z+3}{z^2+10z+21}, D=\{z|5<|z|<6\}$　(2) $f(z)=\frac{2z+1}{z^2+7z+12}$, $D=\{z||z|<2\}$

(3) $f(z)=\frac{3z^2+6z+2}{(z^2+2)(z+5)}, D=\{z|2<|z|<4\}$　(4) $f(z)=\frac{2z^2+5z+1}{(z^2+1)(z+3)}, D=\{z||z|>6\}$

(5) $f(z)=\frac{z^3+3z^2+4z+2}{z^4+11z^2+10}$, $D=\{z|2<|z|<3\}$